LA CIENCIA

MAL-TRATADA

Crítica a *Razón y Revolución* de *Alan Woods y Ted Grant*

LAS MATEMÁTICAS

Manuel Martínez Llaneza, Septiembre de 2007
Publicado en www.profesionalespcm.org

ÍNDICE

1 Introducción

La Fundación Federico Engels publicó en julio de 1995 el libro ‘’*Razón y revolución. Filosofía marxista y ciencia moderna*’ traducción de ‘*Reason in Revolt- Marxist Philosophy and Modern Science*’ de Alan Woods y Ted Grant (*AWTD* o *los autores* en adelante) que fue reproducido en 13 cuadernillos en la colección “*cuadernos del caum*” del Club de Amigos de la Unesco de Madrid en noviembre de 1996, dentro de la Serie *Ciencia y Sociedad*. Las citas y las referencias de páginas (entre corchetes) aluden a la primera traducción citada.

La obra aborda una amplia serie de temas del pensamiento y la ciencia pretendidamente desde la óptica del materialismo dialéctico elaborado por Marx y Engels, concebido como ‘*una manera de entender el mundo*’ [377].

Tan interesante empeño se ve lamentablemente frustrado y el resultado es un manual al clásico estilo soviético: por una parte, una exposición esquemática con distinta fortuna de algunos aspectos del pensamiento de Marx y Engels y, por otra, una clara manipulación de elementos de diversas ciencias que ‘prueban’ la corrección de las previsiones de los fundadores del materialismo dialéctico según la personal versión de los autores.

Curiosamente esas pruebas vienen siempre de la mano de los descubrimientos de moda, más en la línea de la propaganda que del análisis. (Recuerdo un folleto soviético de hace unos cuarenta años en que se celebraba la cibernética como el triunfo del pensamiento dialéctico en las matemáticas y la física frente al pensamiento mecanicista, lineal, simplista, etc. que había dominado hasta entonces, lo que auguraba un período de esplendor revolucionario). Se recurre a una gran cantidad de citas vengan o no a cuento, no siempre de autores solventes, que ‘demuestran’ no se sabe qué principios dialécticos, oscuramente evocados, que sirven para explicar lo que alguien ya ha explicado anteriormente o para lamentarse de que los científicos no sean suficientemente dialécticos para haberlo explicado ya todo.

Sostengo que se trata de un libro de interés nulo para cualquier persona con algunos conocimientos científicos y peligroso para el que lo lea sin ellos, y de ninguna manera puede considerarse una aproximación marxista a la ciencia, sino que más bien se sitúa en la corriente irracionalista posmoderna.

Parto de la tesis de que ni la más atenta lectura de Marx permite pronunciarse sobre las matemáticas (u otra rama de la ciencia) a quien las desconoce profundamente. El propio Marx, cuando se dio cuenta de la importancia de la economía, no se dedicó a pontificar sobre las consecuencias que ya conocía, sino que se encerró a estudiarla en serio durante años, escribió infinitas notas, comentarios, cartas y consultas, y sólo llegó a publicar en vida el primer tomo de El Capital. Se podrá estar o no de acuerdo en sus conclusiones, pero no se le puede atribuir frivolidad alguna. En esa seriedad habría que empezar a ser marxista.

Voy a tratar de justificar lo dicho con un análisis del apartado **16. Las matemáticas en la encrucijada** y algunas referencia al **17. La teoría del caos** (cuaderno XI del Caum), que constituyen las partes más dedicadas a las matemáticas. Lo mismo se podría hacer con otros capítulos, en particular los dedicados a la física, con la misma conclusión.

Una duda de tipo metodológico viene de la pregunta ¿quién es el destinatario de este trabajo? Porque se sabe que Marx quería que El Capital se editara por entregas para que lo estudiaran y entendieran los obreros y ello reforzara su conciencia y capacidad de lucha; por eso se esforzó, a pesar de la complejidad de los temas, en buscar ejemplos sencillos y formulaciones comprensibles sobre el mercado, el capital y su composición, etc. El texto que ahora comento está plagado de referencias, ciertas o falsas, a temas que no son ni mucho menos de dominio común, algunos propios de especialistas y muchos, algunos de ellos fundamentales, absolutamente ignorados por los autores. Tal vez Marx era lineal. O tal vez se ha constatado que la pseudoerudición se ha revelado un método adecuado para la introducción de contenidos ideológicos por parte de los sacerdotes de todas las religiones. (Dice Tolstoi en 'La verdadera vida' que cuando se tiene a los fieles sobrecogidos por el espectáculo de la música, el incienso y el boato, entonces 'allá va la mentira'). He intentado proporcionar una explicación, un ejemplo o una referencia histórica entendibles para un lector con nivel de bachillerato de cada uno de los temas que trato; creo que es suficiente para desmontar la impostura, pero no para llegar mucho más lejos en los asuntos más complejos, que no se pueden despachar con dos dogmas, sino que requieren estudio y conocimientos específicos. Alguna vez hago referencias a cuestiones más elevadas, pero no con valor argumentativo, sino como referencia para los lectores de nivel superior.

Otra consideración previa de tipo general es cuánto más útil sería para la comprensión del devenir de la ciencia estudiar su forma de producción social y sacar las consecuencias históricas y políticas oportunas, que no ponerse a opinar sobre su contenido.

Ante tantas perplejidades, llevado por un espíritu revolucionario que me impide abandonar, guiado, con toda humildad, por el ejemplo del '*Anti-Dühring*' y la '*Crítica del Programa de Gotha*' y convencido de que, como dice '*Materialismo y empiriocriticismo*', existe la verdad y la falsedad, me decido a abordar la crítica empezando por una '*Expurgación de disparates y abusos de interpretación*'. Tras proporcionar alguna información necesaria para contrarrestar la desinformación o incluso contrainformación del texto comentado, concluyo con un '*Contracanto*' a guisa de resumen .

Debo decir de partida que mi punto de vista sobre la relación entre el materialismo dialéctico y la ciencia es el expresado magistralmente por Manuel Sacristán en su prólogo al *Anti-Dühring* editado en México D.F. en 1964 por Editorial Grijalbo, que recomiendo fervientemente a cualquier interesado en estos temas que no lo conozca, pero que renuncio a resumir, aunque no a usar.

No he pretendido zanjar el debate sobre la ciencia, entre otras cosas porque opino que este debate debe estar siempre abierto. Lo que sí pretendo es ayudar a que se lleve a cabo sobre conocimientos concretos y bases científicas.

2 Las matemáticas en la encrucijada/La teoría del caos.

No es fácil comentar un escrito sin estructura reconocible en el que se suceden (¿será por lo del caos?) citas, comentarios, datos ciertos y falsos, afirmaciones gratuitas sin ningún esbozo de prueba y sin objeto reconocible... Aunque me niego a utilizar el procedimiento tan de moda de copiar el escrito y escribir mis comentarios a continuación de cada párrafo, porque aparte de farragoso lo único que consigue es incrementar la entropía, no puedo dejar de salir al paso de algunos de los muchos errores de contenido y abusos de interpretación. Al menos de los que son representativos del enfoque idealista de los autores. Y, para hacerlo, es necesario citar, y citar correctamente, si no se quiere caer en la misma manipulación que el texto hace de la obra de muchos autores según iremos viendo, lo que evidentemente no se desea.

2.1 Expurgación de disparates y abusos de interpretación

Hay que lamentar errores de traducción o de concepto como '*punto unidimensional*' (el punto tiene dimensión cero) [356], '*sensatas*' por 'sensibles' o 'sensoriales' [356], '*sonidos*' por 'palabras' [356], el olvido de palabras castellanas como 'cuatrillón', 'quintillón', etc. en los '*cinco añadidos... a los sonidos originales*' [356], '*transcendentales*' (manda huevos) por 'transcendentes' [358], '*método exhaustivo*' por 'método de exhaución' [358], '*cantidad infinitesimal*', cosa que no existe [359], '*instantes*' (?) [360], '*números infinitamente pequeños y grandes*' (no hay tal) [362], `*Bolanzo*' por 'Bolzano' [363], '*inducidos por ordenador*' (?) [370].

No hay un párrafo en el que no se empleen adjetivos inútiles, carentes de significado o hiperbólicos. Muchas frases aparecen sin que se sepa por qué ni para qué. Cuando se dice sin desarrollar *'Este es un ejemplo claro de las consecuencias negativas de llevar la división del trabajo a su extremo'* [355], inquieta pensar que este comentario, nada progresista por cierto, pretenda sugerir que sería bueno que las matemáticas las desarrollaran los médicos y la medicina los obreros de la construcción, por aquello del hombre universal y renacentista u otras pamplinas que parecen constituir el trasnochado ideal de los autores (¡pobre Hegel, cuántas insensateces se cometen en tu nombre!).

Como dar cuenta de todo ello exigiría una extensión injustificada, procedo a seleccionar lo más significativo, con el único objetivo de demostrar que no existe el más mínimo fundamento en todo el texto, aunque hay que reconocer que tampoco hay en él ninguna conclusión que fundamentar. Pasemos al examen. En cursiva las frases del texto seguidas de la página entre corchetes. Se indican los epígrafes del texto en negrita.

16. ¿Reflejan la realidad las matemáticas?

'Las matemáticas tratan sobre las relaciones cuantitativas del mundo real' [357]. Las matemáticas no tratan siempre sobre relaciones cuantitativas[1]. Algunas partes de las

[1] Los números son hoy más bien el dominio de la economía capitalista que, desprovista de toda valoración cuantitativa, los esgrime como único argumento.

matemáticas, la Aritmética y la Geometría Euclídea tratan sobre cantidades, pero la Topología (como los propios autores citan en [371]) y las Álgebras de Boole no lo hacen; es dudoso calificar de cantidades a los objetos de la Aritmética Transfinita. Otra cosa, y esto figurará en la relación de acuerdos, es que *todas* las matemáticas, como todo el pensamiento humano, deriven *en última instancia* de la observación del mundo real. (Ya hablaremos del logicismo).

'Los llamados axiomas sólo nos parecen autoevidentes porque son producto de un largo período de observación y experimentación de la realidad' [355]. Esa concepción de que los axiomas son autoevidentes sólo se les cuenta ahora a los niños de primaria cuando se habla de la geometría clásica; hace mucho tiempo que el concepto de axioma tiene un carácter convencional. Nadie pretende que sean autoevidentes axiomas como los de la geometría de Lobachevski (no es última moda, tiene casi doscientos años, lo trataremos en el punto de Geometría) por no pasar a la Física Cuántica. Precisamente, ahora, con la forma de producción de ciencia que corresponde al estado de desarrollo de las sociedades avanzadas, el formalismo se ha convertido en una práctica corriente y se inventan sistemas axiomáticos de forma académica 'adentrándose por los caminos del formalismo... sin que se adivine el fin perseguido' (es decir su relación con la realidad) como decía Julio Rey Pastor, que no era marxista que se sepa, hace más de sesenta años. Es que hay que hacer tesis doctorales y publicar artículos para progresar en el sistema (materialismo duro).

'Utilizamos el sistema decimal no por deducción lógica o 'libre albedrío', sino porque tenemos diez dedos' [356]. Atrevida conclusión que nos llevaría a deducir que los miembros de otras culturas tenían doce, dieciséis o dos dedos, lo que está sin demostrar. El sistema duodecimal ha sido ampliamente empleado, incluso para cálculos astronómicos complejos en Mesopotamia; calcular en ese sistema sólo requiere aprender las tablas del once y del doce, que no son más complicadas que la del siete; su variante sexagesimal la empleamos en las horas y en las coordenadas geográficas de grados, minutos y segundos[2]. El sistema romano se usó por una cultura avanzada y no tiene en su escritura una base como los otros (para contar con ábacos no es determinante la base). Sí era decimal el sistema de los griegos, pero no avanzaron mucho en la aritmética; aunque los árabes trajeron la numeración decimal, la gente, que no se dedicaba mayormente a las matemáticas, siguió midiendo y contando en pies, pulgadas, libras, verstas, etc. Hace no muchos años, en España se iba por un cuartillo de leche; el cuartillo (aproximadamente medio litro) era la cuarta parte, no decimal, de un azumbre (octava parte de una 'cántara'). Todavía usamos en fontanería las medidas de medio y tres octavos (de pulgada, usual en el mundo anglosajón) que derivan de un sistema binario (2, 4, 8, 16, 32, 64) que es, no casualmente, el que se emplea generalmente en informática (1 K = 1024). En los mercados se pide 'cuarto y mitad' de queso. El sistema métrico decimal fue impuesto tras la Revolución Francesa por una decisión de 'libre albedrío' del mismo tipo que la circulación por la derecha o el metro como la diezmilésima parte del cuadrante del meridiano terrestre[3]). Yo le llamo a eso, permítaseme la autocita, 'irracionalismo cartesiano', que consiste en dar por bueno y evidente lo que corresponde a un cierto formalismo burocrático que 'queda bien' y parece muy 'lógico'.

---

[2] Para contar hasta doce, basta seguir con el dedo pulgar las falanges de los otros cuatro dedos. Llevando con la otra mano las docenas, se cuenta hasta setenta y dos. Esto lo hacen actualmente algunos pueblos.

[3] Véase Julio Verne, *Aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África Austral.*

(Los griegos)’*...al presentar sus teoremas como el producto puro de la deducción lógica se estaban engañando y engañando a las futuras generaciones’* [357]. Un poco fuerte la expresión, además de falsa. Muchos de los problemas resueltos por los geómetras griegos fueron presentados entonces como respuesta a demandas de oráculos o necesidades religiosas: el cálculo de la raíz cúbica, problema no lineal por cierto, obedecía a la necesidad de construir un altar cúbico de volumen doble del existente; al menos eso contaron. Ya hace mucho tiempo que se sabe que los griegos no eran tan apolíneos como se los presentó (Nietzsche cogió una buena jata con ello): pintaban las estatuas que ahora vemos blancas, ofrecían sacrificios a los dioses y condenaban a los que consideraban impíos; el poder siempre procede igual. Si Euclides elaboró el primer sistema axiomático del que se tiene conocimiento, le tenemos que estar muy agradecidos, porque abrió las puertas al pensamiento científico, despojando la geometría del mito, que no quiere decir del origen en la realidad que él tenía muy presente ¿Qué hizo Marx sino escarbar en la estructura profunda de las relaciones capitalistas, despojarlas de las anécdotas y encontrar las leyes que reflejan su funcionamiento? Ah, e intentar exponerlas con sencillez y claridad.

Sobre la relación de las matemáticas con la física, se dice: ‘*Muchos físicos modernos declaran abiertamente que sus modelos matemáticos no dependen de la comprobación empírica, sino de las cualidades estéticas* (?) *de sus ecuaciones.*’ [355]. Es lamentable que tamaña aportación a la epistemología de la ciencia no aparezca documentada y sólo se haga referencia a anónimos ‘físicos modernos’ sin precisar siquiera si también hay posmodernos entre ellos; entretanto no llegue tal documentación, y dado el contexto, debemos seguir suponiendo que los autores ignoran todo lo referente a la dialéctica física-matemáticas de lo que daremos algunas pinceladas más adelante.

Contradicciones en matemáticas

‘Los últimos pitagóricos descubrieron que muchos números, como la raíz cuadrada de 2, no se pueden expresar en números. Es un “número irracional”’ [357] Tal vez sea la traducción, pero no pasa de un trabalenguas eso de que algunos números no se pueden expresar en números. ‘*Es útil para calcular la longitud del lado de un triángulo*’. Depende del triángulo, para unos sí y para otros no. También sirve para la corriente trifásica y otras cosas. ‘*Así tenemos números irracionales, números imaginarios,....., todos con características contradictorias y extrañas*’. ¿Contradictorias con qué? ¿Extrañas para quién? Si decimos que los chinos hablan con sonidos contradictorios y extraños, ¿no será que no sabemos una palabra de chino? Los párrafos de este apartado son un monumento al disparate y un ejercicio de autosatisfacción en la ignorancia dignos de las más altas jerarquías eclesiásticas de todos los tiempos. Pero continúa.

‘*El misterioso π (pi) [...] identificarlo con la razón entre la circunferencia y el diámetro...*’[358]. ¿Qué quiere decir o qué intenta sugerir la palabra misterioso? Está bien claro de qué se trata, de la relación entre la circunferencia y el diámetro. ‘*Sin embargo no se puede calcular su valor exacto*’. Sí se puede, vale exactamente π, que es un número tan exacto como raíz de dos o veintisiete. Si lo que se quiere decir es que no admite una expresión decimal finita, dígase, y dígase por qué preocupa tanto, si no es por alguna suerte de fetichismo, porque a 1/3 le pasa lo mismo y no se arma tanto revuelo. ‘*No se puede expresar π como la solución de una ecuación algebraica*’. Falso, π sí es solución de muchas ecuaciones algebraicas, en particular de la ecuación $x - \pi = 0$

(si se quería haber dicho 'de coeficientes enteros o racionales', haberlo dicho, pero también se puede decir que 2 no es solución de ninguna ecuación algébrica de coeficientes impares[4] y nadie se extraña; es decir que, si imponemos una restricción, obtenemos una limitación de las posibilidades, como en la vida misma). El delirio continúa con los números imaginarios, llenos de contradicciones y contrasentidos. ¿Qué explican, de qué informan todos esos comentarios? ¿Por qué este canto al irracionalismo en vez de intentar entender y explicar?

El apartado acaba con unos números que '*descubrió*' (sic) Dirac '*... que desafían las leyes de las matemáticas normales, que plantean que* a *multiplicado por* b *es igual a* b *multiplicado por* a' [359]. Ahora aparecen las matemáticas 'normales', denominación no muy usual que debe referirse a hacer cuentas en el mercado, porque cualquier estudiante de bachillerato sabe que el producto de matrices no es conmutativo, por poner un ejemplo entre muchos posibles, y no se conmueven los cimientos de la sociedad ni de la ciencia. Por cierto, las matemáticas no tienen leyes, sino teoremas, que no se descubren, sino que se formulan, deducen o demuestran, y algo de lo que hizo Dirac, al que se mal-cita -no en lo de la no conmutatividad que era entonces ya muy viejo- es un prodigio de imaginación físico-matemática que no pretendía desafiar a nadie, sino dotarse de herramientas matemáticas que le permitieran formular sus ideas físicas y obtener deducciones útiles de ellas.

¿Existe el infinito?

Señalo de partida que la cuestión es tan tonta como preguntar si existe el siete. (Salvo que se crea que el siete está reconocidamente asentado en el platónico mundo de las ideas y se esté intentando 'descubrir' si el infinito se encuentra también allí).

'*Las matemáticas tratan con magnitudes definidas. El infinito, por su propia naturaleza, no se puede contar ni medir*'. [359]. Santo Tomás no lo hubiera mejorado. Las cosas caen porque su propia naturaleza es 'cayente'; los gases (algunos) suben porque tienen naturaleza 'subiente'. Poner nombres no es explicar (Molière ya se reía mucho con ello) y poner nombres falsos es confundir. Las matemáticas tratan con magnitudes definidas (o las definen, ¿o querrá decir finitas o constantes?, que tampoco) o con entes matemáticos que no son magnitudes (¿o lo son los espacios topológicos?), como no se caiga en la tautología de definir magnitud como aquello que es objeto de las matemáticas. Sería conveniente de paso explicar cuál es la naturaleza que se supone al infinito.

'Las paradojas de Zenón [...] revelan brillantemente las limitaciones del método de pensamiento conocido como lógica formal' [360]. ¿Qué culpa tendrá la lógica formal de la limitación de conocimientos y herramientas en una ciencia concreta en una época concreta? ¿Es cuestión de lógica formal que Leonardo da Vinci no pudiera construir un aparato volador? ¿Inventaron otra lógica o razonaban sin lógica los que crearon el cálculo infinitesimal que da cumplida explicación a las aporías de Zenón? Las 'limitaciones' de la lógica formal poco tienen que ver con las matemáticas; las trata con mucha gracia Cervantes cuando le plantean a Sancho la decisión sobre qué hacer con el que dice que va a que lo ahorquen, cuando la ley dice que ahorcan al que miente y dejan libre al que dice la verdad (capítulo LI de la segunda parte del Quijote). Las 'limitaciones' de la lógica formal tienen mucho que ver con los intentos de

[4] Par o impar sólo se predica de los números enteros

fundamentación en la lógica formal de las matemáticas (Russell y otros) o del lenguaje y el pensamiento (Carnap y otros), tema al que nos referiremos luego. Personalmente preferiría hablar de extralimitación de los pensadores que de limitación de la lógica, pues lo contrario induce, aunque ciertamente no se enuncia, a pensar que hay ciencias o lógicas ilimitadas, lo que tiene un tufo metafísico evidente.

Es cierto que Arquímedes abordó el tema del límite seriamente, pero es muy atrevido decir que '*siguió evitándolo con un rodeo*' [360]. Llegó hasta donde pudo llegar, que fue muchísimo y que lo sitúa como uno de los más grandes matemáticos de la humanidad. Pero el asunto de la producción social de la ciencia, que AWTG no ha entendido en absoluto, no coincide exactamente con la calidad de los científicos individuales y las intuiciones, ideas, propuestas, aunque sean tan geniales como el método de exhaución y se enuncien y se apliquen con la claridad y rigor con las que él lo hizo, requieren de un largo proceso para plasmarse en cuerpos teóricos[5]. Es del más elemental materialismo darse cuenta de que, cuando un individuo se adelanta en veinte siglos a los problemas que la humanidad se plantea, es más que probable que sus trabajos queden sin desarrollar. El cálculo infinitesimal moderno se desarrolló cuando hizo falta, sin negar la talla de sus fundadores. Veremos otros casos más adelante.

El resto del tratamiento del problema del infinito es ininteligible. Se utiliza el término cuando se quiere con total falta de rigor hablando de que '*el propio universo se compone de una cadena infinita de causas y efectos...*'[360], que es por lo visto lo que acepta la física moderna y se contrapone a '*la cruda y unilateral* (sic, por lo visto no hubo consenso) *noción del infinito como una serie infinita* (buena definición de lo definido) *de números de la aritmética simple* (??), *en la que el "infinito" tiene siempre un "principio" en el número uno* (???????)'[360-361] según, por lo leído, pontificó Hegel. Es decir: los números que no sean de la aritmética simple (??) quedan, pues, excluidos del infinito; el infinito no puede empezar en dos o en siete, salvo que por "principio" (¿de la serie?) se entienda su "espíritu" que añora al "uno" que une y lo mantiene presente aunque no esté, evitando alguna contradicción o paradoja que se introduciría subrepticiamente en caso contrario entre los axiomas y la lógica formal. ¿Queda claro? Luego se mezcla a Arquímedes con Aristóteles con una total confusión entre lo que hacía y decía uno y otro, aparecen brevemente los '*matemáticos de la India* [que] *no tenían ese tipo de escrúpulos e hicieron grandes avances* (¿de cuáles se trata?) [361]'; más tarde, alguien que no se cita intentó '*abolir la contradicción de pensamiento, de acuerdo con los rígidos esquemas de la lógica formal*', lo que '*retrasó el desarrollo de las matemáticas*' [361]; menos mal que todas las contradicciones las resuelve '*el espíritu aventurero del Renacimiento*' [361] que viene a ser algo así como el Séptimo de Caballería de la época.

Pero, resulta que no. Según AWTG, el hecho de que cada número entero tiene un cuadrado (el texto no dice que lo tiene, sino que Galileo lo planteó) contradice el axioma de que '*el todo es mayor que cualquiera de sus partes*'[361] y aparecen nuevas y angustiosas contradicciones. '*Los axiomas supuestamente inabordables* (¿?) *y las "verdades eternas"* (¿?) *de las matemáticas han sido derrocados uno por uno. Llegamos un punto en que se ha demostrado que todos los cimientos del edificio son inseguros y que necesita una reconstrucción a fondo sobre pilares más firmes, y a la vez más flexibles...*` Derrotado el Séptimo de Caballería, llegamos a la Guerra de la

[5] Se desarrolla más adelante este tema.

Galaxias como corresponde a la modernez en que nos instalamos. Todas las verdades derrocadas, no podemos ir a la compra, no sea que el tendero nos sume la cuenta sin la necesaria flexibilidad.

Todo esto es de una falta de seriedad impresionante. No sólo los adjetivos reseñados, y otros muchos que no se transcriben, son impropios para referirse a estos problemas[6], sino que todo el relato destila un tufo idealista de lucha entre el bien y el mal que oculta toda la dialéctica del avance de la ciencia, disfrazándola de pugna ideológica entre escrupulosos y despreocupados, sin relación alguna con la realidad y los problemas prácticos con que la sociedad se enfrentaba, ni tampoco con la dialéctica interna del propio pensamiento científico.

No existe ningún "axioma" que establezca que el todo es mayor que cualquiera de sus partes; se trata de una noción más o menos intuitiva ligada al significado de 'todo' y 'parte' en el lenguaje ordinario, pero las matemáticas no se dedican a soportar o fundamentar el lenguaje, aunque interactúan con él (dialécticamente como dirían los autores; aunque el adverbio no añada nada, parece que es de rigor para considerarse marxista, cuando sería más relevante estudiar el muy interesante contenido 'concreto' de la interacción). Veamos un ejemplo de cómo funciona esta relación. Ha sido evidente para toda la humanidad que la Tierra es plana y que el Sol recorre diariamente el firmamento de Este a Oeste; el lenguaje así lo refleja, pero eso no constituye un axioma, ni una verdad eterna, y la agrimensura basada en la geometría plana no ha entrado en crisis catastral cuando se ha descubierto que no era cierto. Sencillamente, y de forma menos dramática de la que expresan los autores, se han adaptado algunos términos lingüísticos y conceptos comunes y otros han quedado como estaban sin plantear mayores problemas; los tamaños de las parcelas quedaron como estaban, pero se estableció una forma distinta de calcular y medir para las largas navegaciones. Se abrió el camino de la Geometría Diferencial y de la Topología por el que transitaron figuras tan ilustres como Gauss y Riemann, pero ninguno de ellos dijo, que se sepa, que Euclides era un mentecato, ni siquiera corto de luces. Es verdad que siempre hay una Iglesia que se empeña en crear los problemas para mantener una dominación ideológica basada en verdades eternas fabricadas con una mezcla de los conocimientos antiguos y las supersticiones, pero eso pertenece a otro campo que no podemos abordar aquí. Lo que duele es que se intente poner a Marx y Engels como los santos de una nueva religión de la ignorancia.

En todos los tiempos, incluidos los actuales, el hombre ha especulado sobre lo que le preocupaba y no conocía, y algunos han dicho cosas muy agudas y otros, majaderías históricas, pero, cuando la ciencia ha llegado a un nivel suficiente de explicación de los fenómenos, su comprensión, conceptualización y verbalización han pasado al campo científico y al técnico, y se han divulgado más o menos rápidamente por unos u otros cauces. Siempre ha habido reaccionarios que negaban desde el poder todo conocimiento nuevo, pero ahora llevamos un par de siglos en que estamos llenos de aficionados que pretenden explicar la evolución de la ciencia, sin que se sepa para qué[7], aunque en muchos casos pueda adivinarse que es por publicar. La Iglesia Católica ha hecho muy

[6] No se trata de purismo. La analogía es una vía muy importante para la conceptualización, pero hay que saber de qué se habla.

[7] Recomiendo vivamente el libro 'Imposturas intelectuales' de Alan Sokal y Jean Bricmont (Paidós, 1999 en castellano)

bien, aunque tarde, en pedir perdón por el trato infligido a Galileo, pero ahí acaba su papel: no tiene que venir ahora a explicarnos el sistema solar ni las galaxias y es irrelevante para la ciencia que lo que dice el Antiguo Testamento sea o no compatible con la astronomía y otras ciencias. Voy a decir una herejía: Si Kant no hubiera escrito la '*Crítica de la razón pura*', la idea que tendría la humanidad de los conceptos de espacio y tiempo sería la misma que ahora, aunque no supiera que eran sintéticos a priori, dicho con todos los respetos a un filósofo serio; sin embargo, si Marx (u otro en su lugar, claro) no hubiera escrito '*El Capital*', la historia de los últimos ciento cincuenta años hubiera sido muy distinta.

Pero volvamos al infinito que luego ampliaremos algo más en un punto específico. Arquímedes que, aunque se reveló un gran físico e ingeniero, se consideraba un matemático 'puro', en el sentido de que creía que el estudio de la geometría sin relación con sus aplicaciones era la actividad más elevada que se podía ejercer, desarrolló, con todo rigor, un método, llamado 'de exhaución', que contenía la base de lo que posteriormente ha sido el cálculo infinitesimal y con el que resolvió problemas con soluciones que aún hoy asombran. Trató el problema del límite como una sucesión (finita) de pasos de cálculo o razonamiento, sin consideraciones metafísicas sobre el infinito, pero no llegó a formalizar y generalizar las consecuencias de su 'invento', cosa que ha pasado a muchos grandes matemáticos y físicos. La diferencia es que en su caso no había quien recogiera su antorcha y continuara su trabajo porque sus especulaciones no eran aplicables a los problemas de la época, en contraste con el éxito que tuvieron su famoso principio referido a los fluidos y sus leyes de la palanca, que, aunque su formulación anticipara los 'modernos' métodos de desplazamientos virtuales, también desaparecidos durante siglos, los resultados tenían aplicación inmediata. Cuando a mediados del siglo XVII se abordaron de manera generalizada y sistemática los problemas que dieron lugar al nacimiento del Cálculo Infinitesimal, en particular el cálculo de trayectorias de planetas, tangentes y áreas, se procedió a ir creando las herramientas necesarias (conceptos, teoremas y procedimientos de cálculo) con mayor o menor intuición o rigor en la medida en que se necesitaban y los diversos avances lo permitían. Los resultados fueron sometidos a crítica, depuración y desarrollo y fueron dando lugar a nuevos avances, siempre como un producto social.

Para tratar esto, ya que nos ponemos a escribir, en vez de asustarlo con un infinito teológico, ¿no sería mejor intentar que el lector se aproxime al concepto del infinito matemático? Dedicaremos un apartado posterior al tema del infinito.

El cálculo

A pesar del cambio de apartado, seguimos con el infinito, por lo que trataré de abreviar, a pesar de que es imposible encontrar más de dos líneas sin un disparate.

'*Muchos de los llamados axiomas de las matemáticas griegas clásicas ya habían sido minados por el descubrimiento del cálculo diferencial e integral... Así, uno de los axiomas de la geometría plantea que recto y curvo son absolutamente opuestos y que los dos son matemáticamente inconmensurables, es decir, que uno no se puede expresar en términos de otro. Sin embargo, en última instancia, recto y curvo se consideran iguales en el cálculo diferencial*' [361-362]. ¿Cómo se podrá minar un axioma? ¿Qué querrá decir 'absolutamente' opuestos? ¿Qué axioma plantea eso? Ya que no habla de rectas o segmentos o circunferencias o elipses, ¿qué entiende por 'recto' y 'curvo'?, ¿los espíritus de la 'rectitud' y de la 'curvidad'? ¿Y si la curva está poco curvada? Lo de 'matemáticamente inconmensurable' debe ser una mala traducción por 'inefable', digo yo, porque trata de que se expresen o no. Y la *última instancia* debe ser el Tribunal Constitucional que ha dictaminado la igualdad de derechos, lo que les vendrá muy bien a los estudiantes. Pura charlatanería sin ningún contenido.

Continúa de manera caótica con citas e interpretaciones, alguna tan peregrina como '*precisamente porque no estaba clara del todo, siempre daba los resultados correctos'* [362] (¡vaya mina!) para enredar con cosas que deberían ser tan obvias como que los avances en las ciencias se realizan a partir de experiencias diversas, intuiciones ciertas y falsas, análisis acertados y erróneos, analogías fructíferas o lastrantes, conceptualizaciones afortunadas y desgraciadas, ... Obvias para quien no tenga el profundo espíritu religioso de los autores y su firme creencia en lo revelado y en su inmutabilidad, así como en la perversidad intrínseca de los que se niegan a aceptarlo. Más adelante dedicaremos unos párrafos al método científico en matemáticas y su relación con el mundo, ya que el texto desaprovecha una brillante ocasión para ejemplificar su dialéctica. Sin embargo, llega a conclusiones tan pobres como '*la razón por la que se puede utilizar el infinito, y se debe utilizar, en las matemáticas modernas es porque se corresponde con la existencia del infinito en la propia naturaleza'* [364]. Esa es su dialéctica, el reflejo fotográfico de la Creación, en el que la humanidad se limita a reconocer la grandeza de lo que va descubriendo. Pues no, el hombre, en su práctica social, interactúa con la naturaleza y genera sus herramientas materiales y conceptuales, en particular las científicas; no se usa el infinito porque se encuentre en la calle, sino porque se necesita para explicar el mundo, o determinadas cuestiones del mismo; no se sabe que Bernoulli encontrara ninguna lemniscata en su pueblo, ni Nicomedes una concoide, ni Diocles una cisoide[8]. Y, aunque es muy fácil despotricar a posteriori, demuestra conocer muy poco el que no aprecia, aunque no entienda, la dialéctica de la creación científica y su belleza.

Crisis de las matemáticas

Como era de esperar, este apartado no trata de ninguna crisis de las matemáticas, sino de consideraciones epistemológicas sobre su consistencia, relación con la lógica, etc. que han sido abordadas por diversos pensadores –matemáticos o no- desde distintas ópticas. Es un tema muy interesante que, como siempre, aquí se despacha con unas cuantas citas, cuatro simplezas y dos calificativos.

No es fácil resumir esas cuestiones, pero al menos deberían darse datos o referencias que permitiesen al lector saber de qué se habla en lugar de machacarlo con conclusiones - ¿sobre qué?, sólo se habla de 'contradicciones', sin decir en qué consisten- mal extraídas de un escrito de Morris Klein (ojo, no es Felix Klein, el gran geómetra). Por ejemplo, habría que haber hecho alguna referencia al logicismo de Russell, Frege y Whitehead[9], a su relación con el neopositivismo de Carnap y el Círculo de Viena y su

[8] Lemniscata, cisoide y concoide son figuras geométricas creadas por los autores citados, que no reflejan figuras de la naturaleza, pero tienen propiedades útiles. Se utiliza su infrecuente nombre para ironizar sobre el tono pedante del escrito: bastaría considerar que en el campo no se encuentran círculos ni rectas.

[9] Se propusieron reducir las matemáticas a la lógica formal. Después de mucho trabajo realizado, Russell se dio cuenta de que todo el sistema construido era contradictorio (la contradicción que encontró era equivalente a la paradoja del Quijote citada anteriormente) y que no es posible desligar las formas de los contenidos. No perdieron todo el tiempo empleado, dado que aportaron resultados parciales importantes, pero el objetivo metafísico de encontrar un mundo formal independiente de la experiencia quedó descartado para siempre.

intento de crear un lenguaje bien construido[10]; son temas conocidos o al alcance de muchas personas no necesariamente matemáticas, lo que puede ayudar a situarles el discurso. En este campo sí tiene mucho que decir el materialismo.

Todo desemboca, cómo no, en el teorema de la 'incomplitud'[11] de Gödel, curiosamente un ejemplo del más puro formalismo, que esta vez no molesta a los autores (a mí tampoco, por supuesto).

Para no hacer 'infinito' este apartado, este asunto se tratará -someramente, pero sin falsedades- más adelante en otro. Sólo se adelantarán dos consideraciones:

- La palabra 'contradicción', que tan abusivamente se emplea en todo el texto cuando los autores no entienden algo[12], aquí tiene un sentido estrictamente formal: algo no puede ser A y no-A (tertio excluso). Una sola contradicción invalida un sistema axiomático (concepto que, como antes se indicó, no tiene nada que ver con la autoevidencia)[13].

- Para garantizar la ausencia de contradicciones, sería necesario, aunque no suficiente, poder **decidir** de una forma rigurosa y sistemática si una proposición dada es cierta o falsa en el sistema. Lo que nos dice el Teorema de Gödel es que no podemos asegurarlo en todo caso, que las proposiciones no son siempre *decidibles* en todo sistema.

El Teorema de Fermat[14] y las conjeturas de Goldbach[15] y Poincaré[16] son ejemplos muy conocidos de teoremas a cuya demostración o refutación han dedicado enormes esfuerzos los matemáticos. El primero se ha demostrado después de trescientos años de intentos; del segundo, de apariencia simplicísima, no sabemos si es cierto o no, ni tan siquiera si algún día lo podremos saber. Parece abusivo calificar a esto de crisis de las matemáticas, precisamente ahora que sabemos en qué terreno estamos.

Sólo los planteamientos neopositivistas del lenguaje bien construido a los que me he referido pudieron aspirar a un mundo cerrado de verdades absolutas, pero, aunque se han registrado rebotes parciales, su fracaso es hoy universalmente admitido (creo).

Menos atención que a las 'contradicciones' dedican los autores a las otras 'visiones' de las matemáticas que clasifican como idealistas y descalifican por ofrecer un '*triste espectáculo*' [366]. Falta su visión clarificadora de la verdadera verdad y nos dejan con el corazón encogido. Pero llega a remediarlo...

---

[10] Independientemente del significado de las palabras. En cierto sentido es similar al anterior y acabó naturalmente en fracaso. No tiene nada que ver con la gramática universal de Chomsky.

[11] Palabra que no figura en el DRAE, como muchas de las empleadas en el lenguaje científico. Tal vez sea mejor así a tenor de las explicaciones que se dan en muchos otros casos.

[12] Sin al menos distinguir con Hegel entre *Widerspruch* y *Gegensatz*. Sobre la pedantería, ver la nota 8.

[13] Una cosa es ser dialéctico y otra ser la alegría de la huerta.

[14] $x^n + y^n = z^n$ es imposible para x, y, z, n enteros y n mayor que dos.

[15] Todo número par mayor que dos se puede expresar como suma de dos números primos.

[16] Es de carácter topológico, no aritmético, y, aunque su formulación es muy simple, los conceptos usados se salen del alcance de estas notas.

Caos y complejidad

En el anárquico planteamiento del texto, existe después un apartado de mayor rango titulado "*17. La teoría del caos*" (que, por supuesto, apenas trata de ello), pero seguiremos el orden del documento. Hacemos aquí la expurgación de disparates y dedicaremos un punto a tratar de aclarar el caos en que nos sumen.

'*La diferencia entre orden y caos tiene que ver con las relaciones lineales y no lineales*' [367]. Caos y orden no son categorías opuestas: orden hace referencia a entropía, concepto físico (también biológico, por supuesto); la no linealidad no asegura el caos. La ley de la gravitación universal de Newton es fuertemente no lineal y no da lugar a desorden ni necesariamente a caos (al menos en el sentido disipativo).

'*Una relación lineal es aquélla que se puede describir fácilmente de forma matemática: se puede expresar de una u otra manera como una línea continua en un gráfico*' [367] HORROR. Dejando pasar lo de 'fácilmente' (la referida ley de la gravitación tiene una 'fácil' expresión y no es lineal), la frase revela una profunda confusión entre los conceptos elementales de **continuidad** (que es lo que se aproxima a la descripción de línea continua, como su propio nombre indica) y **linealidad** (que se expresaría precisamente por rectas que pasen por el origen y que tratamos más detalladamente en un punto específico). Y esta confusión no es un lapsus cálami, sino el leit motiv del escrito y la cabeza de turco de todos los males idealistas, por lo que continúa en la misma página. '*Las matemáticas pueden ser complejas, pero se pueden predecir* (???) *y calcular las soluciones'* (¿de qué?). O no, ya lo demostró Gödel del que se acaba de tratar apocalípticamente sin entender lo que dijo. '*Sin embargo una relación no lineal es aquella que no se puede resolver fácilmente matemáticamente*'. ¡Qué palabrería! ¿Difícilmente sí? ¿Como cuánto de difícil tiene que ser para no ser lineal? ¿Debe considerarse difícil la ecuación de segundo grado, que no es lineal y es resoluble[17]? (Sin embargo luego dice que Lorenz *'Utilizando reglas matemáticas relativamente simples había creado caos*' [368]). Cualquier frase vale como conjuro -diga lo que diga, que eso se supone que no lo entienden los lectores- siempre que contenga las palabras mágicas: orden, caos o linealidad.

La prueba de que no saben lo que dicen es que, sin solución de continuidad, pasan a hacer referencia a problemas verdaderamente no lineales, como el del péndulo, que tampoco entienden, porque citan '*El ángulo cambiante del cuerpo crea una ligera no linealidad en las ecuaciones*', lo que es cierto, para luego mezclarlo con el problema del error proveniente de la fricción y el rozamiento del aire. La ciencia es, entre otras cosas, análisis y no se puede meter todo en un saco y agitarlo si se pretende explicar algo. Los modelos, físicos y matemáticos, son siempre simplificaciones –lineales o no, continuas o no- de la realidad y hay que juzgarlas según el objetivo que pretenden, si se quiere saber cómo y cuándo se pueden aplicar a casos concretos[18]. El estudio del modelo no lineal del péndulo sin fricción ni resistencia del aire tiene mucho interés en sí mismo por

[17] Mediante cuadraturas. Ver más adelante el comentario sobre la cuadratura del círculo.

[18] En muchos casos, como veremos en varios ejemplos, la relación entre las formulaciones matemáticas y sus aplicaciones es bastante remota, pero sólo una actitud utilitarista y reaccionaria puede plantear medir la ciencia por su utilidad inmediata y más si esta utilidad la debe evaluar un burócrata o un gestor. Por citar un ejemplo manido, ¿qué utilidad tenía para los cardenales de la curia romana que existieran o no los satélites que veía Galileo con su nuevo telescopio o que cayeran antes o después las bolitas que tiró desde la torre de Pisa?

ser uno de los pocos modelos no lineales que se pueden abordar directamente de forma elemental, ya que, aunque sea duro para los autores, la mayor parte de los problemas no lineales tienen que abordarse por procedimientos lineales. A la hora de aplicar los resultados a un péndulo, habrá que ver si son despreciables la fricción y el rozamiento en el entorno espaciotemporal en que queremos realizar la aplicación, o, por el contrario, tenemos que realizar correcciones o usar o crear otro modelo. Pero a lo mejor, lo que deducimos del modelo nos permite abordar otros fenómenos oscilatorios.

La absoluta frivolidad del discurso de AWTD no se limita a mezclar y confundir continuidad y linealidad, caos y no linealidad, sino que introduce en el mismo mortero estabilidad, bifurcaciones y aleatoriedad, ejemplos no explicados que nada explican y conclusiones particulares que nada concluyen, para crear una salsa indigerible, solo apta para devotos. Los ejemplos, por otra parte, se refieren a estudios cosmológicos, atmosféricos o biológicos y, curiosamente, el papanatismo tecnológico les impide distinguir entre realidades y modelos, lo que recuerda al 'lo ha dicho el ordenador' que emplean los empleados 'listos' que no quieren dar explicaciones al público que reclama.

En Matemáticas, que es de lo que trata en este cuadernillo, caótico, ya lo dijimos al principio, no puede identificarse nunca con aleatorio. Los problemas de caos se presentan en sistemas: no lineales, pero no en todos los no lineales; continuos o discretos; pero siempre deterministas, es decir, no aleatorios. No son problemas de bifurcaciones o de estabilidad, aunque pueden darse en estos fenómenos.

En resumen, la película no es tan espectacular como su título prometía, ni la crisis se ve por ninguna parte, al menos si se entiende en sentido fuerte, no como evolución más o menos conflictiva, que eso siempre sucede.

Los fractales de Mandelbrot

Mal empezamos. Se pueden dar distintas valoraciones de la obra de Mandelbrot, pero los fractales no son suyos; lo que él aportó fue el uso del ordenador, lo que le permitió generar dibujos espectaculares, una serie de trabajos y el afortunado nombre. Aunque lo ignoren AWTD, el estudio de las funciones reales más o menos 'regulares' no es lo único que ha ocupado a los matemáticos estos últimos siglos anteriores a la 'crisis'. Dirichlet estudió en la primera mitad del siglo XIX funciones (entre otras la que lleva su nombre[19]) que los autores calificarían de 'extrañas' y Cantor definió conjuntos fractales[20], aunque no los llamara así, a principios del XX. El estudio y extensión del concepto de dimensión ocupó muchos esfuerzos y no los podemos resumir aquí ni remotamente. Pero sí podemos dejar constancia de la frivolidad de los autores, porque, para concluir que el mundo es complejo, que no lo sabemos todo, que hay mucho trabajo por hacer y muchas cosas por descubrir o entender, no hace falta tal exhibición de generalidades periodísticas más propias para *épater les ingénus* con frases altisonantes sin contenido, que no prueban nada.

---

[19] La *función de Dirichlet*, definida en el intervalo [0,1] atribuye el valor 1 a los números irracionales del intervalo y el 0 a los racionales. No puede dibujarse; no es continua en ningún punto, pero presenta propiedades interesantes, por ejemplo, desde el punto de vista de la integración y la teoría de la medida.

[20] Por ejemplo: dividimos el intervalo [0,1] en tres partes y quitamos la del medio sin la frontera. En cada una de las dos que quedan hacemos lo mismo y así hasta el infinito. El conjunto que obtenemos es un fractal. No podemos dibujarlo ni hacer infinitos cálculos, pero podemos estudiar muchas de sus propiedades.

'*Un avión, por ejemplo, perdería fuerza de sustentación si el flujo laminar del aire sobre el ala pasase a ser turbulento*' [371]. Siento desilusionarlos, pero el flujo del aire alrededor del ala (no sólo 'sobre') pasa a turbulento siempre y los aviones vuelan. De lo que deben haber oído hablar es del desprendimiento de la corriente, que produce pérdida de sustentación respecto al modelo de fluido ideal; también se produce siempre, pero se intenta retrasar para hacer mínimo el efecto. Paradojas de la vida: una posible forma de hacerlo es adelantar la transición de laminar a turbulento, es decir, al revés de lo que dicen, utilizar la turbulencia para aumentar la sustentación[21]. De todas formas ¿qué interés tiene este ejemplo? Este trabajo no está dirigido a ingenieros aeronáuticos, que se partirían de risa, sino a personas que no tienen por qué saber qué es flujo laminar, ni turbulento, ni la distribución de presiones en un ala, ni el desprendimiento, ni el número de Reynolds, ni las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ello, si los autores tomaran un ejemplo cierto en apoyo de su palabrería, no les serviría de mucho, y si, como es el caso, toman un ejemplo falso por no haberlo entendido, hacen el ridículo.

Hay matemáticos dialécticos, según dicen, como el que '*uniendo una serie de cabos, ha desarrollado lo que él llama una "teoría universal" del caos*' [371]. La conclusión inmediata debería ser poner en la Universidad una asignatura de '*atar cabos*', cosa que, por lo visto, no se ha hecho muy bien hasta ahora, y que sustituiría a los caducos métodos lineales de investigación. No es que él lo diga, sino que hay quien piensa que '*su universalidad (...) se extendía no solo a modelos, sino a números concretos*' [371]. ¿Queda claro? A partir de este descubrimiento de los cabos cuando se vaya a comprar una docena de huevos, tendremos que aclarar si el 'doce' es vulgar o caótico. El problema de no entender absolutamente nada de lo que hablan, aquí se agrava con una actitud impropia de un marxista: la de dar crédito a cualquier cosa que 'parezca' oportuna para su pseudorrazonamiento, ya que la conclusión está dada.

Hay muchas cosas discutibles o falsas en el final de este apartado, pero, como expondré posteriormente el tema, aquí me he limitado a señalar los errores manifiestos.

Cantidad y calidad

'*Los libros de texto de matemáticas nos dan una idea errónea de cómo es el mundo en realidad, de cómo funciona la naturaleza*' [372]. Nadie ha pretendido que los libros de texto de matemáticas sirvan para explicar cómo funciona la naturaleza; normalmente sirven para explicar cómo funcionan las matemáticas, aunque es evidente su poco éxito en casos como el de los autores. Tampoco las matemáticas, salvo para algún cabalista, explican la naturaleza, aunque nos proporcionan herramientas que nos ayudan a conocerla y explicarla.

'*La geometría tradicional nos enseña que no se puede cuadrar el círculo, sin embargo este no es el caso de la topología. Las líneas rígidas de demarcación se rompen: un cuadrado se puede transformar ("deformar") en un círculo*" [372]. El disparate llega aquí a lo patético. La 'cuadratura del círculo' es un problema clásico, al alcance de todo el que tenga la mínima curiosidad, sea o no matemático, resuelto hace tiempo, y que no consiste en absoluto en dar martillazos a un círculo de hojalata hasta convertirlo en un

[21] También para disminuir la resistencia. Esa es la razón por la que las pelotas de golf no son lisas: para *adelantar el paso a turbulento* del flujo *para que* retrase el desprendimiento y *disminuya* la resistencia.

cuadrado (que es lo que, de forma más fina, viene a hacer la Topología[22]). Cuadrar una figura es calcular su área o su volumen, hoy 'cuadratura' es equivalente a integral definida. El nombre viene de que, si se define el área de un cuadrado como el producto del lado por sí mismo[23], conocer el área de cualquier figura es equivalente a conocer el lado del **cuadrado** que tenga la misma área que dicha figura. Cuadrar un círculo de radio r, en consecuencia, es encontrar el lado l de un cuadrado de área $\pi.r^2$, que es el área del círculo, es decir, obtener $l=r\sqrt{\pi}$ (r por raíz cuadrada de π). ¿Dónde está entonces el misterio de la cuadratura del círculo, que se ha convertido en el paradigma de lo insoluble? En que el problema lo plantearon los geómetras griegos como 'conocido el radio de un círculo, encontrar **con regla y compás** el lado del cuadrado de la misma área que el círculo' (por supuesto, con un número finito de operaciones) y con regla y compás, que eran sus herramientas, sólo pueden resolverse problemas hasta segundo grado (no sólo lineales) entre los que no figura el cálculo de π. Es decir, lo que no se puede hacer es cuadrar el círculo con regla y compás, es decir, **construir con regla y compás un cuadrado de la misma área que un círculo dado**, pero esto no se supo hasta que mucho después se conoció la naturaleza transcendente (no confundir con transcendental, que no estamos en metafísica) de π y entretanto todos los esfuerzos por conseguirlo resultaron vanos, aunque, como sucede con frecuencia, dieron lugar a otros hallazgos. Conclusión de la historia: la cuadratura del círculo es un problema métrico, no topológico; la Topología no sólo no resuelve el asunto, sino que ni siquiera lo trata; el asunto no es cuadrático por lo que no tiene solución con regla y compás; sabemos perfectamente cuál es su solución; cuando de un tema no se sabe hablar, lo mejor es callarse (Wittgenstein, *Tractatus*, versión adaptada)[24].

Acabada la Topología que al principio era mala porque no daba cuenta de las '*discontinuidades repentinas, dramáticas*' [372], pero luego parece buena porque consigue cuadrar el círculo, siempre que sea de plastilina, pasamos a las ecuaciones diferenciales de las que tampoco parecen entender nada, ni siquiera que muchos de los asuntos del caos que tanto les preocupan se tratan mediante ecuaciones diferenciales, que tratan de funciones regulares (continuas y diferenciables más o menos veces) y por tanto poco dramáticas.

El arrebato lírico del resto del apartado ('Canto a Mandelbrot y al infinito' debería titularse) excede con mucho a mi capacidad literaria y, como no tiene nada que ver con las Matemáticas, lo dejaré para expertos en mitología nórdica.

17. La teoría del caos

Este capítulo parece haberlo escrito 'el otro', algo más sensato que 'el uno' de la primera parte. Expone la génesis de los trabajos meteorológicos de Lorenz con errores,

---

[22] La cita del párrafo siguiente presenta de forma bastante apropiada para la divulgación el objeto de la topología, salvo en lo referente a las dimensiones en los espacios euclídeos, que no se limitan a tres; los autores lo citan sin entenderlo y sin venir a cuento.

[23] De ahí viene que se llame cuadrado de un número a su potencia dos.

[24] Hay más enfoques disparatados del asunto. Yo tuve de profesor de religión (obligatoria en el nacionalfascismo) un cura ignorante, valga el pleonasmo, que se reía de los científicos, que según él buscaban como locos la cuadratura del círculo, diciendo con superioridad: "¿Es que no ven que si es redondo no puede ser cuadrado?" Me ayudó mucho a conocer a los charlatanes.

pero sin disparates, y dice cosas tan razonables como que '*es extraño que Gleick* [el profeta de la primera parte] *y otros hayan prestado tanta atención al efecto mariposa, como si inyectara alguna extraña mística en la teoría del caos*` [subrayado mío] o '*Desgraciadamente el libro de Gleick no es claro sobre la aplicación de la teoría del caos a la política y la economía*' [378], o '*Este pasaje no puede tomarse al pie de la letra*' [379, sobre una idea de Gleick en economía], aunque sigue posteriormente citando al gurú (y a otros) en su versión más trivial, de mero relator, y en la más metafísica, sin que de este conjunto de citas inconexas pueda deducirse ninguna idea digna de mención.

Los errores de fondo permanecen. '*... en un sistema complejo no lineal, un pequeño cambio en los valores de partida puede provocar un cambio enorme en los valores finales*' [378]. Lo trataré en más detalle en el punto del caos, pero recuerdo que hay sistemas lineales divergentes, aunque no caóticos; sistemas caóticos nada complejos, aunque sí no lineales; y sistemas no lineales complejos que no son caóticos, atendiendo a la característica de sensibilidad a las condiciones iniciales propia de los sistemas caóticos.

'*Durante trescientos años, la física se basó en sistemas lineales*' [383]. Falso, la teoría de la gravitación es fuertemente no lineal y es uno de los pilares de la física moderna. En matemáticas, las ecuaciones de orden superior y los logaritmos, por citar los ejemplos más conocidos, son no lineales; la ecuación cúbica se trató completamente en el siglo XVI y Neper desarrolló los logaritmos a principios del siguiente siglo. '*El nombre lineal se refiere a que, si pones un ecuación de este tipo en una gráfica, lo que tienes es una línea continua*' [383]. Error garrafal ya señalado en la primera parte, que invalida cualquier comentario de su autor sobre linealidad o no linealidad.

Después de una serie de citas cuyo objeto no se adivina, terminan quejándose de que '*los pioneros de la teoría del caos (...) parecen no estar en absoluto al corriente de la auténtica revolución en la lógica en dos mil años –la lógica dialéctica, elaborada por Hegel y posteriormente perfeccionada sobre bases científicas y materialistas por Marx y Engels*' [385]. ¿Lo estaba Arquímedes? ¿O Neper, que era un teólogo integrista? ¿O Einstein o Schrödinger aunque son posteriores? Si de verdad los autores creen que el conocimiento de Hegel es la mejor condición para ayudar al advenimiento de la "Nueva Ciencia", lo mejor que podrían hacer es mostrar cómo, dar alguna idea a los pobres investigadores sobre la metodología a emplear y los caminos a explorar, en lugar de apuntarse a la penúltima moda tomando en vano los nombres de Marx y Engels[25].

Y la traca final: '*¡Cuántos errores, callejones sin salida y crisis en la ciencia no se podrían haber evitado si los científicos hubieran estado armados con una metodología que reflejase auténticamente la realidad dinámica de la naturaleza, en lugar de entrar en conflicto con ella a cada paso!*' [385]. Es imposible una versión más idealista de la producción científica, más en la línea de los profetas del Antiguo Testamento[26].

[25] Brassens da un mejor ejemplo dialéctico cuando dice: "Certes, on ne se fait pas putain comme on se fait nonne, c'est du moins ce qu'on prêche en latin à la Sorbonne"

[26] Es como decir: "Si escuchas la palabra de Hegel, tu Señor, y te mantienes fiel a Él, la contradicción desaparecerá de tu vida y tu pensamiento, y construirás la dialéctica lineal, que será tu fin y tu reposo".

3 Información imprescindible[27]

En este apartado se van a tratar de una manera somera alguno de los conceptos de los que los autores hacen uso y abuso para que el lector pueda apreciar cuán lejos de la realidad se encuentran y poder justificar algunas de las conclusiones que se expondrán seguidamente. De acuerdo con el propósito de este escrito, he utilizado un lenguaje sencillo; necesariamente esto implica falta de precisión, pero en ningún caso falseamiento de los conceptos, salvo algún posible error inadvertido.

Se va a tratar el concepto de linealidad, el infinito matemático y los elementos básicos de la teoría del caos. A continuación se darán unos ejemplos de la evolución histórica de algunos campos de las matemáticas para que se vea cuán diferente es su dialéctica real del planteamiento idealista de los autores.

3.1 Linealidad

La palabra lineal se emplea con frecuencia como sinónimo de simple, trivial u obvio. Ya hemos señalado la confusión con continuidad.

¿Qué es la linealidad?

En Matemáticas y en Física la linealidad es un concepto muy preciso que vamos a exponer y que ilustraremos con la ayuda de unos ejemplos sencillos, que no lineales. En cierto tipo de expresiones, llamadas funciones o aplicaciones, se emplean variables, llamadas independientes, que toman sus valores en un determinado conjunto, (números, precios, porcentajes, matrices…) y otras, llamadas dependientes, que toman valores (del mismo o diferente tipo) dependientes de los que tomen las primeras. Por ejemplo, el coste de una compra (en euros, por ejemplo) es una variable dependiente de las cantidades (en números enteros de piezas o litros o kilos) que se adquieren, supuestos los precios dados. El tiempo que se tarda en un viaje es una variable dependiente de la velocidad, si ésta es uniforme, o del perfil más o menos complejo de velocidades en otro caso. Frecuentemente se expresan así relaciones de causalidad en las que la variable independiente es la causa y la dependiente el efecto, como puede ser la aceleración producida por una fuerza o la deflexión de una viga producida por una carga. Esta denominación de causa-efecto es muy ilustrativa como ejemplo, y así la emplearemos, aunque las Matemáticas prescinden de los contenidos no matemáticos de sus objetos y relaciones[28]. Si llamamos $\mathbf{x}$ a la causa o variable independiente e $\mathbf{y}$ al efecto o variable dependiente (no necesariamente números), la aplicación, función o relación causa-efecto entre ellas la expresaremos como $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}$ produce o causa $\mathbf{y}$) o $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ ($\mathbf{y}$ es función de $\mathbf{x}$). La relación entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, es decir la función f, puede ser de tipo aritmético, algébrico, estadístico, diferencial, etc. En estas notas, como se ha indicado y como es conforme a su finalidad, sólo se emplearán relaciones sencillas, pero es conveniente indicar que, aún siendo lineales, pueden ser enormemente complejas.

---

[27] De la que han prescindido.

[28] El uso de esta terminología no implica afirmar ni negar nada sobre la causalidad

En términos conceptuales, una función o aplicación se dice lineal cuando cumple dos condiciones: 1) **Proporcionalidad**: el efecto producido por una causa es proporcional a esa causa, y 2) **Aditividad**: el efecto producido por dos causas que actúan simultáneamente es la suma de los efectos que producirían ambas causas si actuasen separadamente[29]. El conjunto de ambas se conoce como principio de **superposición** que caracteriza la linealidad.

Esto es en principio tan sencillo como observar que, si se va a comprar un kilo de peras y otro de manzanas, y se decide al final comprar dos de peras y las mismas manzanas, el coste de la parte de las peras se duplica (proporcionalidad), pero el coste total es siempre la suma del de las peras más el de las manzanas (aditividad).

Parece obvio, pero ¿es que esto no es así siempre con todas las cosas? No, no todas las relaciones son lineales, ni siquiera en el mercado. Por ejemplo, si se va a comprar pantalones y nos ofrecen un descuento por comprar dos (50 rupias un pantalón, dos por 90), la relación deja de ser lineal. No es que sea realmente muy complicada, pero no es lineal, no cumple la primera de las condiciones. Lo mismo si nos ofrecen una rebaja por llevarnos al tiempo unos percebes: no se cumple la segunda condición.

Hay expresiones matemáticas muy simples que se emplean en bachillerato que no son lineales. Por ejemplo, el cuadrado de un número: si multiplicamos un número por dos, su cuadrado queda multiplicado por cuatro (no cumple la primera condición); si hacemos el cuadrado de una suma no obtenemos la suma de los cuadrados de los sumandos[30](no cumple la segunda condición).

Las relaciones algébricas lineales se expresan por ecuaciones de primer grado, en ocasiones por muchas al tiempo, pero la diferenciación y la integración, entre otras, son también lineales. Es difícil defender que una ecuación de segundo grado es más compleja que una integral, por mucho que ésta sea lineal y la primera, no, pero tal vez Hegel tenga algún pronunciamiento al respecto que desconocemos.

¿Por qué la linealidad?

Evidentemente en esta cuestión hay cosas más allá del descuento en la compra de pantalones.

El concepto de linealidad se ha revelado de gran fecundidad, tanto por la estructura matemática que en él se basa como por la variedad de aplicaciones a las que sirve en todas las ciencias. La teoría que hoy manejamos no ha tomado su forma hasta el siglo XX con la formulación del *espacio de Hilbert*, que une bajo una construcción común conceptos antes muy distantes del álgebra, la geometría y la topología y los aplica a espacios funcionales de 'tipo infinito' que, aparte de la belleza conceptual que poseen, permiten modelizar con un bagaje conceptual común problemas físicos tan distintos como el sonido de un instrumento musical, el comportamiento estructural de una

---

[29] Esto se expresa matemáticamente como $f(a\mathbf{x_1} + b\mathbf{x_2}) = a\,f(\mathbf{x_1}) + b\,f(\mathbf{x_2})$, donde $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son dos valores de la variable $\mathbf{x}$ y a y b números (escalares) cualesquiera. Equivale simultáneamente a 1) $f(a\mathbf{x}) = a\,f(\mathbf{x})$, y 2) $f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2})$, que expresan las condiciones antes enunciadas.

[30] $(2a)^2 = 4a^2 \neq 2(a)^2$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ (Obsérvese que el segundo sumando expresa una interacción entre de a y b)

cubierta o la estabilidad del vuelo de una aeronave. De hecho sobre esta estructura se aborda hoy en día la mayoría de los problemas no lineales.

¿Tiene sentido justificar por qué? Creemos que no hay otra justificación que la que se deduce de su estudio y de la observación de la riqueza de las relaciones que se obtienen. La historia de las investigaciones matemáticas que han conducido a los conceptos hoy empleados muestra que han confluido y se han decantado muchos trabajos anteriores, fundamentalmente en tres campos: la geometría, algebrizada por Descartes en el siglo XVII y enriquecida posteriormente con planteamientos de tipo estructural; la teoría de estructuras algebraicas, iniciada por Abel y Galois en sus investigaciones sobre el problema no lineal de las raíces de las ecuaciones de orden superior en los albores del siglo XIX, y la teoría de funciones nacida en el siglo XVIII como consecuencia de la introducción del cálculo infinitesimal por Leibniz y Newton y el desarrollo de sus aplicaciones.

Si quisiéramos (y supiéramos) hacer metafísica (o tal vez poesía) podríamos 'teorizar' por qué los espacios de Hilbert constituyen el basamento conceptual y operativo sobre el que alza una gran parte de la construcción matemática actual, pero hay demasiados sociólogos a la violeta opinando sobre lo que ignoran para que nos tiente ese camino.

Desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, el principio de superposición que, como se ha dicho, caracteriza los problemas lineales, permite organizar de una manera sistemática un número limitado de cálculos y mediciones que dan cuenta del funcionamiento de modelos complejos de miles de variables en multitud de situaciones. Es decir, permite resolver problemas complejos por superposición de otros más simples.

La semejanza formal permite aplicar métodos y soluciones similares a problemas aparentemente sin relación.

¿Para qué la linealidad?

Hay procesos, muchos, que son lineales en la medida que los conocemos y que, en consecuencia, se expresan linealmente de manera natural. Hay procesos que no son lineales, pero que, en las aplicaciones técnicas se pueden aproximar suficientemente mediante teorías lineales. ¿Qué es 'suficientemente'? Que conocemos el error o una cota del mismo que nos asegura que el uso que hacemos de los cálculos lineales es adecuado para el fin que se persigue.

Hay procesos, también muchos, que no son lineales. ¿Qué hacemos con ellos? Un número muy pequeño de los muy sencillos de ellos, ridículo en proporción pero no necesariamente en importancia, tiene una solución directa, no lineal (por ejemplo, el pandeo de columnas en determinadas condiciones de apoyo) o está relacionado con un problema lineal que nos permite acotarlo (porque la no linealidad se presenta a partir de unos valores). Cuando no se pueden utilizar estos métodos, entonces frecuentemente *se linealiza el problema*, es decir, se sustituye el problema no lineal por una sucesión de problemas lineales que se aproximan 'suficientemente', lo que quiere decir que se acota el error y se hace tan pequeño como se quiera[31]. Tanto es así que se ha llegado a decir que la historia de la Ciencia es la historia del esfuerzo del hombre por linealizar los

[31] Esto recordará la integral definida como limite de sumas.

problemas. Todo esto ha venido notablemente incrementado últimamente con la utilización de ordenadores que trabajan muy rápidamente con métodos lineales.

Ya en la Grecia clásica se aproximaban las curvas –no lineales, aunque continuas- por polígonos y Arquímedes se adelantó veinte siglos al cálculo infinitesimal utilizando métodos lineales de acotación y límite para medir y relacionar áreas y volúmenes.

Pero veamos un ejemplo no lineal aparentemente sencillo, para ver la dificultad de su tratamiento. La ley de la gravitación universal de Newton[32] establece una relación no lineal (inversa al cuadrado de la distancia) entre la fuerza de atracción y la distancia de dos cuerpos. Aplicada al movimiento de **un** planeta alrededor del Sol, supuesto éste quieto o en movimiento uniforme, permite calcular su órbita elíptica con el Sol en un foco y una ley de velocidades[33]. También se puede calcular si se considera el efecto del planeta sobre el Sol. Pero si hay más de un planeta y no se considera el Sol fijo (el problema *des trois corps*), no es posible una formulación analítica general de las trayectorias. Para los problemas no lineales no rige el principio de superposición, es decir, no se puede resolver cada planeta en particular y juntar los resultados. Sin embargo podemos calcular con gran precisión el movimiento de los planetas y otros objetos, como satélites artificiales, aplicando métodos lineales, apoyados en la capacidad de cálculo de los ordenadores, en un horizonte temporal suficiente para nuestras necesidades.

Hay que tener en cuenta que mientras 'lineal' es algo bien definido por sus propiedades, 'no lineal' se define por exclusión, por lo que no es, lo que hace que comprenda 'todo lo demás' donde se encuentran todo tipo de alternativas. Aunque no es cuestión de hacer profecías, no parece razonable esperar que se cree en el futuro una teoría de lo 'no lineal', salvo en lo que se refiera a aspectos muy generales. Ya existen campos no lineales estudiados con gran profundidad, algunos desde los griegos, como las cónicas, que hoy se continúan en las formas cuadráticas de gran utilidad en problemas de máximos y mínimos, estabilidad, curvatura, etc. Se trata de la segunda aproximación, la primera es la lineal, a multitud de problemas no lineales. Aproximaciones de orden superior se utilizan también en análisis local.

Otro de los ámbitos de estudio de problemas no lineales es el del caos que tocaremos luego, pero es de esperar que en el futuro se puedan abordar muchos más.

3.2 El infinito matemático

¿Por qué decimos que el conjunto de los números naturales (1, 2, 3,...) es infinito y qué queremos decir con ello? Hay varias maneras de explicarlo, dependiendo de dónde se parta (eso pasa frecuentemente, no es una debilidad de las Matemáticas, sino que así es la vida); tal vez la más sencilla sea decir que es infinito porque, dado cualquier número

[32] No es ésta la ocasión de discutir su validez y confrontarla con la teoría de la relatividad, que la subsume. Los movimientos de los planetas se calculan según la ley de Newton, pero, lo que decimos sería 'más' verdad si, por un prurito epistemológico-metafísico, aplicáramos la corrección relativista.

[33] Históricamente fue al revés. Kepler, basándose en observaciones, fundamentalmente de Tycho Brahe, estableció las leyes del movimiento y posteriormente Newton dedujo de ellas la ley de atracción, como comentamos más adelante.

(natural), siempre podemos encontrar otro mayor (por ejemplo, sumándole uno)[34]. Este es un ejemplo sencillo que muestra muy claramente una forma matemática de razonar, que desarrollada es: supongamos que el conjunto fuese finito => entonces habría un número que sería el mayor de todos, sea éste N => dado que N+1>N, siendo N+1 natural, es falso que N sea el mayor de los naturales => el conjunto no es finito[35].

Podríamos prescindir del orden y la suma partiendo de la idea intuitiva de número natural que está ligada a la correspondencia biunívoca: en un grupo hay cinco personas si puedo hacer corresponder cada una a un dedo distinto de mi mano. Lo mismo si el grupo es de animales o cosas, lo que da el carácter abstracto –independiente del contenido al que se aplica- de los razonamientos matemáticos[36]. Si el grupo consta de tres personas no puedo hacerlas corresponder biunívocamente con los dedos de la mano. Sin embargo, si consideramos el conjunto de los números naturales y el conjunto de los pares, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos si a cada número natural lo relacionamos con su doble, que siempre es par. Esta es una forma de definir los conjuntos infinitos, como aquéllos que pueden coordinarse con una de sus partes (propias), cosa que vio Galileo y con la que jugó Borges, y sin embargo le extraña tanto a AWTD que están convencidos de que hay una ley que dice que '*el todo es mayor que cualquiera de sus partes*'[361] .

Hay otros infinitos distintos del anterior, llamado *numerable* por razones obvias, como el de los números reales que no se puede coordinar con el anterior, es el *continuo*. ¿Esos infinitos reflejan la naturaleza? Depende de si consideramos al hombre naturaleza o no. Desde luego, nunca se ha visto un conjunto infinito numerable de nada y sabemos que la materia no es continua, pero la actividad humana es bastante distinta de la de un espejo o una cámara fotográfica; por mucho que se base en la realidad, es capaz de crear herramientas intelectuales originales para comprenderla y expresarla.

Lo dicho se refiere principalmente a cardinales de conjuntos. Otro uso se hace con variables; se dice que una variable que tiende a infinito cuando se hace superior a cualquier valor[37], se llama infinitésimo cuando tiende a cero[38]. Cierto es que, como sucede con todos los conceptos elaborados, esto no surgió así de primeras, sino que se partió de intuiciones o aproximaciones a problemas concretos cuya geometría se

---

[34] A veces se añade 'por grande que sea', pero no es necesario, porque, si es cualquiera, tendría que valer para grandes y pequeños; además, el concepto de 'grande' no es matemático, el de 'mayor', sí. Estas expresiones se usan con frecuencia en los textos elementales y tienen sentido didáctico, porque ayudan a entender recurriendo a la analogía física.

[35] El razonamiento anterior, típico en las Matemáticas, pero no exclusivo de ellas, sigue el procedimiento de 'reducción al absurdo' que se puede presentar en dos variantes: a) si de una proposición se deduce mediante pasos válidos otra que es falsa, la primera también lo es, y b) si la negación de una proposición da lugar a una contradicción es que la proposición es cierta. Este método se usa solo o combinado con la deducción directa, que puede ser sencilla o enormemente compleja, o con la búsqueda de contraejemplos que demuestren la falsedad de una proposición o de su contrarrecíproca.

[36] Lo que no significa que las matemáticas sean independientes de la experiencia como se comentó a raíz del logicismo. Ver nota 9.

[37] Se trata de una simplificación en la exposición. Tiene que ser superior a cualquier valor prefijado para todos los puntos, o valores de la variable independiente, de un entorno; los que recuerden límites del bachillerato reconocerán la definición ε-δ. Lo que quiero hacer notar es que se trata de una variable y no de un número.

[38] Por tanto, la *sucesión* de los números naturales es un infinito, la *variable* real *x* es un infinitésimo en 0.

conocía suficientemente y posteriormente con el trabajo colectivo de análisis se llegó a las actuales formulaciones generales y rigurosas que a su vez serán la base de otras futuras. Sólo Palas Atenea nació completamente armada y tal vez sea un mito.

También en geometría aparece el infinito de varias formas. En el Renacimiento se dieron cuenta de que las rectas paralelas -como las lindes de un camino o las paredes de un edificio- se veían y pintaban como convergentes si no eran paralelas al plano del lienzo; es una observación que podemos hacer en cualquier fotografía. Llamaron *punto de fuga* al de corte de las paralelas en el dibujo. Como los puntos de fuga no representaban un punto de las rectas reales, que no se cortan, para mantener la correspondencia se añadió a éstas un punto que se llamó 'del infinito', los puntos del infinito de las rectas forman la recta del infinito del plano, etc. Así nació la Geometría Proyectiva, que no es euclídea puesto que la proyección no respeta las proporciones, como se sabe. En otras ramas, como funciones analíticas, se consideró conveniente usar un sólo punto del infinito en el plano. ¿Cuál es la realidad? Evidentemente estos infinitos son construcciones matemáticas útiles que podían llevar otro nombre y así no causarían angustia a los autores.

Observando las teorías y sus resultados surgen preguntas que llevan a pensar y dan lugar a nuevas investigaciones. Un cuadrado tiene infinitos puntos. Su área es el cuadrado de su lado. Si quitamos el contorno, que tiene infinitos puntos también, queda la misma área. El área del contorno es, pues, nula, salvo que el área de la suma no sea la suma de las áreas[39]. Esto lleva a desarrollar la teoría de la medida más allá de las ideas intuitivas, pero no en contra de ellas. Ahí empezaron a aparecer los fractales.

Podríamos continuar, pero sólo se trata de dar una idea de lo que hay detrás de las trivialidades que cuentan los autores sobre las matemáticas 'antiguas' de antes del advenimiento del caos. No sólo el infinito –o los infinitos, según hemos visto- son conceptos elaborados por el hombre, también el concepto de punto es una abstracción, pero, como es más inmediata y está más asumida, causa menos desazón.

Hay por tanto que usar los términos con propiedad y no sacar conclusiones basadas sólo en el nombre. Por ejemplo, cuando se dice que 'π tiene infinitas cifras decimales'[40] se quiere expresar que, dado un número natural n cualquiera, por grande que sea, existe un número decimal[41] que se diferencia de π menos de 0'000.....1, con el *1* en la posición n. Se ha sustituido la '*extraña mística*' [378] del infinito por un razonamiento que se puede efectuar en un número finito de pasos.

3.3 La idea de caos en matemáticas y en física.

Dada la insistencia de AWTG en este asunto tan de moda, voy a hacer algunas constataciones con las que complementar las anteriores observaciones al texto. De una

---

[39] Se puede continuar por este camino planteándonos cuántas líneas hemos de quitar para que el área disminuya. La respuesta no es obvia; no se puede decir simplemente que las líneas no tienen área, porque, si se quitan todas, evidentemente no queda área, aunque se pueden quitar infinitas (numerables) sin que el área cambie, y también porque hay líneas, como las curvas de Peano que llenan un área.

[40] Esa definición no es muy propia, pero se da a los estudiantes de secundaria porque es intuitiva, lo que es útil para la enseñanza siempre que no se entienda mal. La dialéctica del aprendizaje es muy compleja.

[41] Muchos, por supuesto. Infinitos. Para el razonamiento basta uno y así se expresa.

manera laxa se entiende en el lenguaje común por caos todo lo que no tiene un orden 'aparente', que quiere decir conocido y explicado por leyes, o es de evolución imprevisible. En esta acepción se engloban muchos problemas de naturaleza diversa; algunos se abordan estadísticamente –se ha dicho que la estadística es la medida de nuestra ignorancia[42]- y otros, no.

En matemáticas *caos* tiene una significación más precisa: hace referencia a la evolución en el tiempo[43] de sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales. Se trata de sistemas deterministas y acotados. Deterministas quiere decir que están determinados a partir de las condiciones iniciales mediante una ley que se conoce; acotados es que los valores de las variables no pueden ser arbitrariamente grandes[44], salvo el tiempo. La sensibilidad a las condiciones iniciales significa que la evolución (determinista) de un sistema al cabo de un tiempo más o menos largo puede diferir mucho si se cambian muy poco los datos de partida o, dicho de otra forma, que cualquier error de partida o de cálculo puede producir un resultado muy diferente del que buscamos[45].

Comoquiera que pocos problemas tienen una solución analítica explícita, aunque se puedan formular mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, la mayoría de ellos se aborda por métodos de cálculo numérico por ordenador, y los ordenadores trabajan con un número limitado de cifras y cometen errores, por lo que, en un sistema caótico desde el punto de vista matemático, el resultado de los cálculos puede diferir notablemente del resultado 'de precisión absoluta'[46]. Esto nos coloca ante una situación curiosa: tenemos un sistema **determinista**, pero no **predecible** en la práctica, es decir, conocemos la ley que lo rige, pero, por mucho que afinemos los cálculos, los resultados al cabo de un cierto tiempo de evolución *necesariamente* contienen diferencias importantes. Es fundamental resaltar que no se trata de una limitación de los procedimientos de cálculo que pueda resolverse con avances en los mismos, sino de una situación *intrínseca* al problema, dado que nunca se podrá trabajar con los números exactos –aunque no sean transcendentes- salvo en casos muy sencillos. Una mejora en la precisión de los cálculos sólo puede retrasar el horizonte en que se presenta el error, no disminuir su cuantía. Cuando, como es frecuente, el modelo matemático tiene por

---

[42] Yo no lo digo así, pero propongo una observación a meditar. Sabemos que las veces que muestra cada cara un dado regular –no cargado- al tirarlo repetidamente siguen una distribución estocástica. ¿Significa eso que el dado no cumple las leyes de la mecánica relativas a inercia, fricción y choque, o que no somos capaces de medir y calcular cada lanzamiento? Si no las cumple, ¿por qué?, y, si sí, ¿cuál es la relación entre las leyes físicas y las leyes estadísticas? (No vale contestar que es dialéctica, ni hacer cuestión de que la misma palabra *leyes* se emplea en la frase anterior con dos acepciones distintas).

[43] Supondremos por claridad que la variable que determina la evolución es el tiempo, aunque la naturaleza física de las variables es irrelevante desde el punto de vista matemático.

[44] La condición de acotado es fundamental. Consideremos como una recta el rayo de luz de una linterna que sostenemos en la mano; si giramos la mano un poco, la recta que forma el nuevo rayo de luz se va separando progresivamente de la anterior. Por poco que la separemos de la posición inicial, la distancia entre ambas se hace tan grande como queramos si nos alejamos suficientemente. Se trata de un problema lineal de sensibilidad a las condiciones iniciales porque es divergente: no es caos.

[45] Aunque no es estrictamente un problema de condiciones iniciales, el siguiente ejemplo puede darnos una idea intuitiva de lo que significa esto. Consideremos dos relojes de péndulo casi idénticos, cuyo período difiera en una cantidad imperceptible de manera que, puestos en marcha, los vemos moverse paralelamente. Si los volvemos a observar al cabo de un tiempo suficientemente largo, los podemos encontrar en cualquier posición relativa (a cualquier distancia dentro del campo del movimiento).

[46] En el anterior ejemplo podríamos sustituir uno de los dos relojes por una simulación en ordenador y la comparación subsistiría en lo esencial.

objeto tratar un problema físico, se añade a lo dicho la precisión con que se miden los datos iniciales del problema, lo que tiene un efecto similar al descrito.

Hemos de renunciar, pues, a tratar los problemas del caos con la misma perspectiva que los no caóticos, sean o no lineales, en lo que tienen de específico, es decir, en el comportamiento *asintótico*, o sea, para tiempos suficientemente altos. Lo que se ha encontrado son soluciones que evolucionan *asintóticamente* –es decir, para tiempos suficientemente altos- hacia una zona que se ha dado en llamar *atractor* –extraño o no- que es normalmente un conjunto de dimensión menor que el espacio original. Encontrar y acotar los atractores puede darnos una medida del error inherente al problema para tiempos muy altos, y encontrar cuánto de altos son estos tiempos puede darnos información del valor temporal de las predicciones.

No existe una teoría general del caos; se están estudiando estructuras que parecen definir unas familias de problemas, como los de duplicación del periodo en el que Feigenbaum –el que ata cabos- ha hecho aportaciones importantes como encontrar una constante general de estos problemas, lo que no quiere decir una teoría universal del caos.

Nadie puede predecir cómo se desarrollarán las investigaciones y cómo se verá la teoría del caos dentro de diez años; puede haber opiniones mejor o peor fundamentadas, e intuiciones que se revelarán fructíferas o erróneas. Es seguro que, dada la estructura de la investigación, se escribirán miles de artículos repitiendo o dando vueltas a conceptos estériles; confiamos en que en conjunto seguiremos aumentando los conocimientos salvo que se produzca una regresión social general hacia una nueva Edad Media a la que parece querer llevarnos la extraña alianza de fundamentalistas religiosos, irracionalistas y posmodernos que acosa los mismos fundamentos del pensamiento de la Ilustración del que somos deudores.

Lo que es necesario comprender es que estamos tratando de un área importante de estudios, pero ni significan una ruptura con los métodos anteriores[47], ni son el final de las matemáticas; cuando avancemos más, aparecerán nuevas estructuras que reorientarán los trabajos, se realizarán síntesis que hoy no podemos predecir, algunos de los problemas que hoy pretendemos tratar por estos medios encontrarán solución por otros caminos y en las matemáticas hay muchos problemas abiertos que, al menos por ahora, nada tienen que ver con el caos.

En lo referente a las aplicaciones físicas de los estudios matemáticos sobre el caos, se está en una situación similar: hay más expectativas que logros. Particularmente no se ha logrado una explicación de la turbulencia, que tanto se cita como ejemplo de comportamiento caótico, lo que, por supuesto, no quiere decir que la investigación no tenga sentido. No olvidemos que el mundo exterior existe independientemente de nosotros y de nuestras teorías y modelos; no es, pues, buen método intentar ahormarlo a nuestras modas[48]. La teoría matemática no revela la realidad, si acaso la refleja en

---

[47] Todas las herramientas y métodos que se utilizan, fundamentalmente de sistemas de ecuaciones diferenciales, han sido elaboradas previamente a la denominación de origen ‘caos’ y muchos resultados son generalización de otros obtenidos con anterioridad. El edificio de las matemáticas está sólidamente asentado y en absoluto se va a demoler para construir otro; esto sólo puede afirmarse si se desconocen tantos los contenidos como la dialéctica de su evolución.

[48] A propósito de ello quiero advertir contra el papanatismo del ordenador. Se lee con demasiada frecuencia en la prensa que ‘*un estudio por ordenador ha demostrado.....*’, sin que se sepa qué se había

modelos que habrán de verificarse mediante la experimentación o comprobación más o menos directas.

Aunque el objetivo de este escrito se ha limitado a las matemáticas, dada la estrecha conexión que existe, vamos a presentar para completar este punto unos ejemplos que puedan aproximar al lector al significado físico de conceptos -predictibilidad, procesos disipativos[49], caos- que se han manejado anteriormente y de algunas de las relaciones existentes entre ellos, asumiendo el riesgo de que la simplificación pueda desvirtuar el sentido profundo de esos conceptos y con la seguridad de que, en el mejor de los casos, sin recurrir a ecuaciones, poco más puede hacerse que orientar la curiosidad de un lector sin satisfacerla.

Consideremos el modelo bien conocido de un planeta que gira alrededor del Sol en ausencia de cualquier tipo de perturbación y de rozamiento. En estas condiciones el planeta se mantendría girando indefinidamente en su órbita elíptica dado que no habría ninguna pérdida de energía en el sistema. Se trata de un modelo determinista, no lineal, conservativo –porque no hay pérdida de energía- y acotado. Podemos escribir las ecuaciones que nos dan la posición del planeta en cualquier instante a partir del conocimiento de su posición y velocidad en un momento dado (condiciones iniciales). Si en la medición de las condiciones iniciales cometemos un error que signifique una diferencia de un segundo en la revolución del planeta alrededor del Sol, al calcular la posición del planeta dentro de mil años (o hace mil años) cometeremos un error de mil segundos y, si seguimos avanzando en el tiempo, el error irá aumentando. Sin embargo, la diferencia entre el planeta del cálculo y el del modelo no puede ser mayor que la distancia entre el afelio y el perihelio, o sea, el eje mayor de la elipse[50]. Este ejemplo tan sencillo –que, en esencia es el mismo de los péndulos de la nota 45- puede mostrarnos un aspecto interesante. Si lo comparamos con el ejemplo lineal de la linterna de la nota 44, vemos que los rayos de luz se separan indefinidamente, mientras que las posiciones de los planetas (el del modelo y el del cálculo), no. Pero, si lo observamos más detenidamente, vemos que, de la misma forma que los ciclistas en un velódromo, el que va más deprisa recorre siempre más camino; lo que sucede es que, después de alejarse del más lento, termina acercándose a él cuando lo alcanza de nuevo. En el caso de las linternas, la separación es lineal –**proporcional** a la distancia o al tiempo- y en el de los planetas la distancia entre ellos está acotada porque se mueven en una órbita finita. Sin embargo, este comportamiento, que no se da en los procesos lineales, tampoco se da en todos los no lineales. Si con la misma ley de gravitación universal consideramos un cometa en órbita de escape del sistema solar[51] (parabólica por ejemplo, como un proyectil en el campo gravitatorio) y aplicamos el mismo planteamiento de error, nos encontraremos con dos parábolas que se separan indefinidamente, como los rayos de las linternas, pero más rápidamente.

---

programado en dicho ordenador. Parece como si los ordenadores por sí solos pudieran dar cuenta de algo, convirtiéndose así, hábilmente publicitados, en los nuevos profetas de la religión del oscurantismo que sustituye el razonamiento por la autoridad, en este caso la de un aparato.

[49] Palabra que no figura en el DRAE, pero que es de uso habitual y de correcta formación castellana, no como ‘máster’, por ejemplo, que sí figura, suplantando tanto a ‘maestría’ como a ‘maestro’.

[50] Estrictamente hablando, se trata de dos órbitas distintas muy próximas, lo que no afecta al fondo del ejemplo.

[51] Julio Verne, *Hector Servadac*

Se podrá decir que no es un problema muy excitante saber con precisión dónde estará un planeta dentro de mil años según un modelo tan simplificado que no tiene en cuenta aspectos esenciales de la realidad. Lo concedo, pero se me reconocerá el valor de indicador que tiene el ejemplo, ya que no es esperable encontrar más precisión cuando compliquemos el problema añadiendo otros cuerpos celestes de forma que no podamos expresar la solución final de forma explícita y tengamos que recurrir a complicados cálculos de ordenador y a la consiguiente acumulación de errores adicionales. Lo que se trata de poner de relieve son las limitaciones de la predictibilidad, que ya tuvo en cuenta Laplace cuando formuló su paradigma. En estos casos, sin embargo, no se habla habitualmente de caos aunque haya sensibilidad a las condiciones iniciales.

Volvamos a nuestro único planeta e introduzcamos una variación en el modelo: consideremos la fricción con el polvo interestelar. Tenemos un modelo *disipativo* que además sigue siendo no lineal; la fricción va disipando la energía del planeta y por ende del sistema, que evoluciona de manera distinta al caso anterior: la velocidad del planeta disminuye, su órbita decrece y termina cayendo en el Sol, que es con propiedad el atractor. Tampoco hay caos. Desde el punto de vista asintótico la solución no depende de las condiciones iniciales[52]. Hay convergencia de todas las trayectorias.

Muchos procesos físicos son no lineales y disipativos y, como el anterior, tienden a una situación de equilibrio. Pero también hay muchos de ellos que, en su interacción con el entorno, reciben de alguna forma toda o parte de la energía que disipan. Si los habitantes del planeta que consideramos antes fueran capaces de suministrarle exactamente la energía que disipa, su comportamiento sería el mismo visto en primer lugar sin disipación. Todos tenemos información televisiva de los ciclones y tifones que se disipan al llegar a tierra porque no reciben energía, mientras que nacen y crecen en mares tropicales que les transmiten calor.

La idea de caos, en sentido fuerte, hace referencia a procesos disipativos que interaccionan con el entorno del que reciben la energía que les impide llegar a una situación de equilibrio por disipación total de su energía. Pero ni mucho menos todos los problemas que tenemos planteados tienen relación con el caos. La física es una dialéctica de conceptos, modelos, métodos matemáticos y experimentación que no se puede reducir de la forma que AWTG pretenden.

3.4 La producción social de las matemáticas

Matemáticas y realidad. La evolución de las matemáticas

Es un tema sobre el que se han escrito volúmenes. No pretendo hacer una aportación filosófica original, ni resolver las cuestiones epistemológicas actualmente en discusión; solamente quiero recordar algunas cosas elementales que parecen olvidarse con demasiada frecuencia y salir al paso de algunas mistificaciones.

[52] El que pueda tardar miles de millones de años no es significativo para la comprensión cualitativa del modelo y de los conceptos asociados. Si queremos un ejemplo de final más próximo, pensemos en tirar una canica en un bol. Si no hubiera rozamiento, quedaría oscilando indefinidamente de forma no lineal. Si hay rozamiento, como ocurre en la realidad, acaba en el fondo del bol independientemente de cómo la hayamos lanzado: no hay sensibilidad asintótica a las condiciones iniciales, el fondo es un atractor.

No debería ser objeto de discusión que las matemáticas no son un dato de la naturaleza, sino un producto del pensamiento humano[53], que interactúa con ella. Esta cualidad la comparten con otras muchas actividades humanas; todas ellas se apoyan en última instancia en el mundo material. En esto ya he manifestado al principio mi acuerdo con los autores, pero se trata de un planteamiento muy general que resuelve pocas cosas[54]. Frente a ello aparecen muchas diferencias. No podemos decir de una metáfora que sea cierta o falsa, sí lo podemos decir de una frase como "es de día" y también de una proposición matemática, aunque en este último caso, la verdad o falsedad no hace necesariamente referencia a un acuerdo o desacuerdo con la realidad objetiva, sino con un conjunto de reglas y postulados cuya relación con la realidad puede ser muy lejana[55], como veremos. Eso hace que la influencia de la ideología del matemático individual en la producción científica sea menos acusada que en la literaria o filosófica. Encontramos natural que un obispo reaccionario y autoritario como Berkeley escribiera lo que escribió, aunque admitimos que un profesor reaccionario y autoritario como Hegel pudiera decir cosas de interés; en la construcción de las matemáticas esas cuestiones son irrelevantes en cuanto a los contenidos positivos[56], a lo sumo ilustran algunos aspectos de la historia y de la naturaleza humana. Sin embargo, sí son determinantes de la evolución general de las matemáticas, como de todas las ciencias y otras actividades, las condiciones técnicas, culturales, políticas y sociales de cada período, y en esta cuestión podríamos decir, adoptando su tono elegíaco, ¡cuántos errores, falsedades y abusos no se podrían haber evitado si AWTG se hubieran limitado a los aspectos sociales e históricos de la producción social de las ciencias, en lugar de entrometerse en sus métodos y resultados!

Las matemáticas evolucionan tanto por la creación de entes y procedimientos que expresan una percepción de la estructura o procesos de la realidad externa, como por el análisis y desarrollo internos de la propia matemática. Daremos a continuación unos ejemplos de esta evolución, sin pretender profundizar en ellos, únicamente para mostrar la compleja dialéctica de su desarrollo, tan lejana a la imagen que dan de ella AWTG.

Geometría. En el caso de la geometría griega, el nexo originario con la realidad es inmediato: se definen figuras y propiedades que representan abstracciones de los cuerpos que se observan tal como se perciben. Esta capacidad de abstracción es humana y universal, se refleja en época temprana en el lenguaje, y da lugar en principio al 'conocimiento precientífico', calificativo que no implica que sea falso ni trivial, pues ha permitido a la humanidad conocer las estaciones, cultivar las tierras, alimentarse, navegar y tratar los metales, entre otras cosas, a unos niveles muy elevados en culturas acientíficas.

---

[53] Por ello, tiene tanto sentido preguntarse por la 'realidad' del infinito matemático como por la 'realidad' del soneto o de la sinécdoque.

[54] Pocas cosas, pero básicas, y alguna de ellas históricamente muy importante. Si Russell, Frege y Whitehead, por una parte, y Carnap y otros miembros del Círculo de Viena hubieran sido materialistas no habrían intentado construir un mundo lógico autocontenido y no habrían fracasado en un empeño imposible. Ver notas 9 y 10.

[55] Por ejemplo, no se encuentran números primos ni matrices en el universo. Por supuesto, tampoco cuadros de Picasso antes de Picasso.

[56] También en física. Las teorías de Newton son independientes de que él intentara mostrar con ellas la sabiduría del Creador

Lo que determina el paso del conocimiento precientífico a la ciencia es el carácter sistemático, abierto y **colectivo** de su elaboración[57]. Interesa subrayar este último aspecto, puesto que, aunque las contribuciones individuales son decisivas y son muchos los teoremas y leyes que toman el nombre del científico que las formuló, incluso después de haber sufrido en ocasiones modificaciones sustanciales, no hay una contribución que no haya sido estudiada, comentada, refutada, modificada o ampliada por muchos otros científicos[58].

Este paso lo dio muy pronto la geometría griega por lo que es considerada como la madre y modelo de las ciencias o al menos del modo de pensar científico. Entonces sí se consideraban los axiomas como verdades autoevidentes de las que se partía, pero también muy pronto empezaron a mostrarse dos elementos que van a repetirse permanentemente: el desarrollo autónomo, producto de la reflexión sobre la propia geometría, y la interacción con otras ciencias, incluyendo otras ramas de las matemáticas. Que Arquímedes hiciera una deducción geométrica de las leyes de la palanca fue brillante para la época, pero nadie podía esperarse por aquellos tiempos que Newton iba a utilizar muchos siglos después las conclusiones a las que habían llegado sobre las secciones cónicas para fundamentar su teoría de la gravitación universal como veremos luego. Los estudios geométricos avanzados no tenían para ellos apenas aplicaciones prácticas, y, salvo que se crea en la providencia divina o en un 'logos' superhegeliano inmanente, es más razonable pensar que muchos estudios iban guiados por razones tan inmediatas como la curiosidad o el prestigio social, comoquiera que se considere aquella sociedad.

Cuando, tras los tiempos oscuros de superstición que algunos invocan hoy, la ciencia volvió a evolucionar, lo hizo con las mismas pautas, aunque a velocidad incomparablemente mayor, entre otras razones, porque se le dedicaron mayores esfuerzos humanos y sociales. La geometría experimentó un desarrollo espectacular en los siglos XVIII y XIX, tanto en sus aplicaciones prácticas (mecánica, construcción, electricidad) como en sus desarrollos teóricos, lo que dio lugar a cambios cualitativos importantes[59].

Por una parte, la geometría se 'algebriza' bajo la influencia de las aportaciones de Descartes (Geometría Analítica), que, al asignar a los puntos del espacio unas coordenadas (conjuntos ordenados de tres números en el espacio tridimensional ordinario, de dos en el plano) respecto a una referencia, permite igualmente representar mediante ecuaciones las diversas figuras geométricas y operar con ellas y abre el camino a los fecundos conceptos de espacio vectorial y aplicación lineal. Esta vía permite concebir 'espacios' de dimensión superior a tres sin más que aumentar el

[57] El énfasis en el carácter colectivo de la ciencia no niega el carácter social del resto de las actividades humanas. ¡Qué fino es el "en la producción social de su existencia, los hombres…" que emplea Marx en el famoso prólogo a la Introducción a la Economía Política!

[58] Fourier fue el primero en aplicar a determinados problemas unos procedimientos de cálculo originales, que dieron pie a otros matemáticos a resolver casos similares. En la teoría de espacios de Hilbert que unifica estos tratamientos, se conserva en su honor el nombre de 'coeficientes de Fourier' a algo que, si el propio Fourier pudiera verlo, seguramente se quedaría perplejo. Como este caso hay otros muchos en la ciencia.

[59] Mis críticas a la utilización superestructural y vacía que hacen AWTD de las leyes de la dialéctica no me llevan a dejar de considerar útil la categoría de cualitativo; lo que quiero indicar aquí es que hay que analizar las cosas en concreto, no invocando categorías 'superiores'.

número de coordenadas y generalizar las relaciones formales[60]; el proceso culmina en los espacios de 'dimensión infinita' en los que se asimilan las funciones a vectores en una teoría que engloba una gran cantidad de temas que nacieron de orígenes diversos y se estudiaban anteriormente por separado. Ahí la Geometría confluye con el Análisis, cuyas influencias había recibido ya en el siglo XVIII para crear la Geometría Diferencial.

Por otra parte, la geometría euclídea experimenta un proceso de depuración. El estudio de la perspectiva en el Renacimiento, que se ha citado antes en el punto relativo al infinito, hace observar que hay varios niveles de problemas que pueden separarse en grupos (incidencia y determinación, paralelismo, y distancias y ángulos) y que dan lugar a ramas, como la Geometría Proyectiva, que no requieren la axiomática euclídea completa. Un ejemplo de este proceso de depuración, importante por sus consecuencias, es el que se realiza con el llamado 'postulado de Euclides'[61]. Históricamente existían dudas sobre su carácter axiomático, es decir, se pensaba por algunos que era consecuencia de los restantes postulados, por lo que hubo numerosos intentos fallidos de demostrarlo a partir de ellos. Otra forma de probarlo era cambiarlo y, si se llegaba a una contradicción, estaría demostrado que era consecuencia necesaria de los otros postulados. Lobachevski, en la primera mitad del siglo XIX, lo sustituyó por un teorema que especificaba que se pueden trazar dos paralelas a una recta; no llegó a una contradicción, sino que construyó una nueva geometría no euclídea, sin contacto alguno con la 'realidad' y de paso demostró el carácter axiomático del postulado[62]. No llegó a saber el uso que la cosmología haría de 'su' geometría un siglo después. Ya en el siglo XX, la teoría de la relatividad requería construir una geometría no euclídea adecuada a sus planteamientos[63], tarea que, con Einstein, llevó a cabo brillantemente Minkovski.

El entendimiento cabal de lo dicho anteriormente rebasa el nivel de conocimientos de bachillerato que pretendimos dar a este trabajo, pero no será difícil de entender para quien haya seguido los primeros cursos de la universidad en ciencias o ingeniería. Pero no trato de hacer entender el universo de las matemáticas a los profanos, sólo mostrar, con el ejemplo parcial de la geometría y en contra de la visión estática de AWTG, que en los doscientos cincuenta años anteriores al surgimiento mediático de la 'teoría del caos' se habían realizado tales transformaciones en el mundo de las matemáticas que causa asombro contemplarlas y que esas transformaciones, lejos de una interpretación materialista mecanicista, provenían tanto de necesidades prácticas inmediatas como del estudio interno de la estructura matemática. Sin duda las necesidades de la navegación impulsaron el estudio de la geometría terrestre, pero las aportaciones de geometría de superficies que construyó el gran Gauss iban mucho más allá de esas necesidades. Por no hablar de los nada prácticos estudios de las soluciones (raíces) de ecuaciones de orden superior (Abel y Galois) que llevaron a lo que ciento cincuenta años después dio

---

[60] No se plantea la cuestión de si estos espacios 'existen'; son construcciones útiles para representar sistemas complejos, aunque estos sistemas estén en el mundo tridimensional (o no).

[61] En realidad se trata del quinto postulado que establece, aunque Euclides no lo expresó en estos términos, que por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela a ésta. Evidente ¿no?

[62] Axiomático en la teoría de Euclides, no en la de Lobachevski. Ya he indicado que, al contrario que en religión, en matemáticas no es lo mismo axioma que verdad.

[63] Porque no es euclídeo el espacio-tiempo einsteniano. Razonar sobre él con categorías kantianas ha dado lugar a gran cantidad de disparates filosóficos, como si los problemas que se plantean no tuviesen bastante dificultad por sí mismos.

en llamarse 'álgebra moderna' y que, junto a los estudios de transformaciones geométricas de Klein (Felix) y otros, contribuyó a cambiar el enfoque de la geometría de una descripción de propiedades de figuras a un estudio de estructuras matemáticas. No creo una coincidencia que esto ocurriera cuando Maxwell creaba la teoría de campos electromagnéticos, Lorentz (no Lorenz, el del caos) formulaba los invariantes que dieron pie a Einstein para su teoría de la relatividad, o Marx estudiaba la estructura del sistema capitalista, pero ese estudio no es objeto de este trabajo que sólo pretende salir al paso de la mistificación del pensamiento científico por parte de AWTG.

Si dibujáramos un mapa de la evolución de las diversas ramas de las matemáticas y sus interrelaciones en los últimos tres siglos veríamos un panorama enormemente dinámico y absolutamente diferente del que nos presentan AWTG; eso nos mostraría la dialéctica de la evolución de las matemáticas mejor que los anatemas y las visiones mesiánicas.

Análisis. Presentamos aquí otro retazo de la reciente historia de las matemáticas para mostrar otro aspecto de interés. Copérnico había establecido la teoría heliocéntrica. Kepler había formulado las leyes que rigen el movimiento de los planetas y cometas del sistema solar[64] basándose en las observaciones astronómicas de Tycho Brahe, lo que representa una notable agudeza. Galileo había establecido la ley de inercia que dice que un cuerpo permanece en reposo o sigue una trayectoria rectilínea si no se ejerce sobre él una fuerza que modifique su estado (principio de inercia). Newton, le cayera o no una manzana, se planteó por qué los planetas y cometas, aparentemente libres en el espacio, no seguían la ley de inercia y se escapaban del sistema solar saliéndose por la tangente; supuso que el Sol ejercía sobre los estos cuerpos[65] una fuerza de atracción[66] que llamó 'gravitación universal'[67].

Hasta aquí la parte física e histórica del asunto. Pero, para justificar su suposición, Newton tenía que encontrar el valor de esa fuerza que producía precisamente las órbitas descritas por Kepler. Dando por buena la geometría que plantea la primera ley de Kepler, demostró en primer lugar que la segunda era equivalente a suponer una fuerza sobre el planeta dirigida hacia el Sol y la tercera se cumplía si la fuerza era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia en cada instante. El principal problema con el que se enfrentó es que no existían herramientas matemáticas para hacerlo y tuvo que inventarlas. Supuso que en el entorno de una posición, para pequeños movimientos, era equivalente considerar la elipse o su tangente en el punto y

---

[64] Las tres leyes dicen: 1) los cuerpos describen órbitas elípticas con el Sol en un foco; 2) las áreas barridas por la línea que une el cuerpo con el Sol son iguales en tiempos iguales (velocidad areolar constante); 3) los cuadrados de los tiempos de revolución son proporcionales a los cubos de la distancia media al Sol (o al semieje mayor de la órbita).

[65] Y los cuerpos sobre el Sol, según el principio de acción y reacción del propio D. Isaac. Por suerte para sus cálculos, la masa del Sol es tan grande en comparación con la de los planetas que puede suponerse despreciable el efecto de la reacción, lo que no ocurre en otros sistemas.

[66] Podía haber supuesto que el principio de inercia era falso o que el concepto de recta dependía de la presencia de masas en el espacio. Puede creerse que por este último camino tal vez hubiese llegado a la teoría de la relatividad si hubiese estado armado con el pensamiento dialéctico oportuno; yo prefiero creer que no se daban las condiciones intelectuales para planteárselo ni existían las herramientas para resolverlo.

[67] La naturaleza de esa acción a distancia ha sido muy discutida, aunque es un gran avance respecto a atribuir las órbitas a la armonía celeste o a la dialéctica del logos. La teoría de la relatividad proporciona un enfoque distinto al problema mediante la curvatura del espacio-tiempo, pero la teoría de Newton ha sido de una importancia histórica y científica sin parangón, igual que muchas otras aportaciones suyas.

con un sencillo cálculo geométrico demostró que sólo una fuerza central conservaba la cantidad de movimiento. La demostración de la dependencia con el tiempo fue mucho más complicada[68] y tuvo que echar mano de sus profundos conocimientos de la geometría griega de secciones cónicas, pero, independientemente de su importancia, no es relevante para lo que aquí quiero mostrar[69]. Lo que nos interesa para el hilo de nuestra argumentación es que lo que hizo al sustituir localmente la elipse por la tangente fue **linealizar** el problema[70]. A partir de ahí nació el Cálculo Diferencial que, en una primera instancia, trata de la aproximación lineal a una función; y, de su mano, el Cálculo Integral, que aborda, también en primera instancia, el cálculo de áreas.

A partir de los planteamientos fisicomatemáticos de Newton – y, simultáneamente, de Leibniz- comenzó el trabajo de la comunidad científica para fundamentar, delimitar y extender los planteamientos, lo que duró en lo básico un siglo y medio y constituye la verdadera dialéctica de la evolución de esta rama de las matemáticas y su interacción con las restantes, como en el caso anterior. Se aplicaron los nuevos conocimientos a los más diversos campos, se estudiaron los límites y condiciones de uso y se generó un sinnúmero de teoremas que se fueron depurando y agrupando hasta constituir el cuerpo teórico que se conoce actualmente. Y, al mismo tiempo que se iba completando el edificio, aparecían nuevos campos, porque los investigadores se planteaban: si, para que se den tales resultados han de cumplirse cuales condiciones, ¿qué sucede cuando no se cumplen y cuáles son los casos en que esto sucede? Todo avance lleva en su seno su límite, pero también el germen de su superación; no hay Fukuyamas en la ciencia[71]. Pero nadie puede plantearse las excepciones a una teoría no formulada; es precisamente la formulación de una teoría lo que pone de relieve diferencias en su aplicación[72]

En este proceso existen muchos otros casos de avances importantes, surgidos de una necesidad concreta, bien interna a la teoría, bien producto de demandas externas, que han dado importantes impulsos a la construcción, casi siempre tras modificaciones o generalizaciones, como son, entre otros muchos, los casos citados de Fourier y Dirac.

Volvemos a encontrarnos, pues, con un complejo mundo de interrelaciones que se compadece mal con la versión maniquea de lo nuevo y lo viejo de AWTG.

El entorno de las matemáticas. Frecuentemente se encuentran en el texto referencias a condicionamientos ideológicos en la ciencia y en particular a las malas consecuencias de la estrechez de miras y el conservadurismo con que se han tratado los temas nuevos.

---

[68] No es linealizable. Menos mal que los griegos habían estudiado muchos problemas cuadráticos.

[69] Feynman retomó la demostración de Newton, ya en la segunda mitad del siglo XX, y la simplificó drásticamente al cambiar el elemento de referencia (ángulo en vez de área o tiempo). Desde el punto de vista del acervo científico fue un trabajo inútil, ya que hoy se puede hacer analíticamente con conocimientos elementales, pero la belleza de la demostración resultante y el homenaje que significaba al genio del inglés merecen una mención. Algo así como la *Sinfonía Clásica* de Prokofiev o un repaso de Molière. ¿Qué sería de nosotros sin los clásicos, incluido Marx? Todos posmodernos.

[70] Evidentemente una elipse no es una recta. El asunto a dilucidar es qué cosas de las que pasan a una elipse quedan determinadas por lo que pasa en su tangente. Es decir, qué cosas son 'linealizables'.

[71] Desde luego que los hay, pero nadie les hace caso.

[72] Dirac no podía plantearse derivar funciones no derivables si no existiese el concepto de derivada, con las limitaciones que sean. Lo que hizo, con una intuición paralela a la de Newton, se justificó con posterioridad mediante la teoría de las distribuciones que amplía el campo del Análisis.

Como no hay mayores concreciones que admitir o refutar, voy a hacer algunas consideraciones sobre el tema, que estimo obvias para quien lo conozca un poco.

Independientemente de que haya diferentes opiniones sobre el quehacer matemático, aquí no cabe el creacionismo ni la charlatanería, que se descubren pronto. Los teoremas matemáticos son demostrables a partir de las definiciones y axiomas. Otra cosa son las intuiciones y conjeturas que, aunque pueden ser importantes como programa de trabajo o incitación a la investigación, no pertenecen al cuerpo de conocimientos hasta que no son demostradas. Es ocioso, por lo tanto, cuestionar o calificar las diversas teorías y ramas de estudio existentes. Sí es importante para la evolución futura la fijación de prioridades para la investigación.

Empecemos por las personas. Los matemáticos y físicos que han participado significativamente en el desarrollo de las matemáticas han sido de diversas tendencias, sin que en su contribución científica puedan encontrarse las trazas de su filiación política, religiosa o ideológica que como personas tenían y muchas veces expresaban en su correspondencia o en los argumentos con que se presentaban a sus protectores. En algunos casos han creído que sus aportaciones eran la panacea de la ciencia y en otros no han llegado a percibir que, solucionando un problema concreto, estaban abriendo puertas a campos insospechados[73]. En ocasiones, algunos matemáticos muy destacados han jugado también un papel importante por su autoridad o por ocupar puestos influyentes en academias o universidades prestigiosas. Se han dado casos en que han impulsado con su autoridad las innovaciones y otros en los que se han instalado en posturas acomodaticias.

Si nos referimos al entorno social, hay más que decir, pero es muy peligroso sacar conclusiones simplistas. El papel represor de la Iglesia Católica es bien conocido, pero su ignorancia sólo les permitió actuar en algunos casos muy escandalosos para ellos; no conozco ningún estudio que justifique si con ello detuvieron el avance científico o, por el contrario, ayudaron a su difusión. La persecución de todas las iglesias a la teoría de Darwin no impidió que Mendel realizara sus trabajos o que se descubriera el ADN, y el apoyo vergonzoso de los *teocons* norteamericanos, empezando por su Presidente, a todo tipo de sectas regresivas no parece menoscabar la capacidad investigadora en los Estados Unidos, donde, por cierto, la mayor parte de los matemáticos lleva más de medio siglo investigando sobre problemas no lineales.

Históricamente, si se exceptúan algunos casos escasos de estudiosos independientes, el apoyo al trabajo de los investigadores era consecuencia del sistema de patronazgo imperante. En la actualidad existen algunas instituciones que trabajan de forma más o menos secreta en temas específicos, como la encriptación para comunicaciones militares, pero la inmensa mayoría de los matemáticos trabaja en las universidades e, independientemente de los contactos y congresos, se comunica sus avances por medio de revistas especializadas de acceso público.

Los condicionantes mayores que existen actualmente sobre el rumbo de la investigación provienen de la propia estructura institucional de las universidades. La necesidad de publicar para el currículum personal -lo que se llamó la cultura del *paper*- ha provocado un aluvión de artículos en cientos de revistas, en ocasiones sin contenidos que los

[73] Véase la nota 58 sobre Fourier.

justifiquen; la súper especialización, la falta de autonomía, las formas de financiación de los proyectos, etc., son más determinantes que las intromisiones ideológicas.

Por último, la asignación de recursos económicos es un condicionamiento importante, y su distribución constituye un serio problema de política científica, cuyo examen queda lejos del alcance de estas notas.

4 Contracanto

El texto comentado es un canto a la nada: no informa del estado actual de las matemáticas, ni describe ninguna crisis ni encrucijada, ni se sabe a qué teoría del caos hace referencia, ni da un solo argumento válido ni ejemplo sobre cómo la teoría de Marx y Engels se relaciona con las ciencia, ni proporciona ninguna ayuda para las futuras investigaciones, ni presenta una reflexión sobre la producción social de las matemáticas, ni sobre su relación con otras ciencias, particularmente la física, pero también la biología y otras. No tiene una estructura reconocible, ni presenta propuestas o análisis de ningún tipo, sólo invocaciones litúrgicas. Se integra en un "*extenso territorio en el que trata de todas las cosas posibles y de algunas más*"[74], en el que no nos adentramos nosotros, pero en el que los autores se comportan en absoluta coherencia con lo que aquí se señala.

La exposición es caótica, utilizado este término en su acepción común; los títulos de los epígrafes no se corresponden con los contenidos y todo está salpicado, venga o no venga a cuento, de referencia a los términos de moda del análisis metamatemático posmoderno: caos, turbulencia, no lineal, etc., entendidos a la carta.

Las escasas argumentaciones del texto, como hemos visto, están apoyadas generalmente en datos falsos o arbitrarios o en valoraciones sesgadas que las invalidan. Incluso cuando se hace alguna constatación cierta, no se establece una relación con la supuesta causa basada en análisis medianamente fundados[75].

De los dos argumentos más repetidos, el de que los resultados de los últimos avances matemáticos muestran el carácter dialéctico de sus leyes sólo se argumenta por la semejanza formal y un abuso del lenguaje, y el de que, si los matemáticos estuvieran armados con el pensamiento dialéctico, las matemáticas avanzarían más rápidamente hacia el conocimiento fundamental del mundo es un buen deseo tampoco basado en datos y frecuentemente negado por la historia. Curiosamente, para ellos sólo son dialécticas las leyes modernas, lo que no deja de ser coherente con su visión maniquea del devenir. La dialéctica de la producción social de las matemáticas y la dialéctica de su desarrollo interno y su nivel de autonomía como superestructura, que deberían ser la base de cualquier análisis, se ignoran o se desconocen. Más arriba se ha mostrado que en las matemáticas no se dan habitualmente opciones alternativas y contradictorias, como se trata de presentar[76], sino que los avances, aun los más revolucionarios, se plasman en procesos complejos y abiertos, tanto en el sentido de matizar y ampliar los conocimientos de una rama como en el de crear otras nuevas, que posteriormente convergerán o no a su vez con otras.

---

[74] Engels, *Anti-Dühring*, ed. cit., pág XXIX.

[75] Para mostrar que la certeza de la constatación del resultado no implica el conocimiento de la causa, mi abuelo decía que unos se quedan calvos de pensar o otros de rascar la cabeza contra el pesebre.

[76] Tampoco en las ciencias físicas, salvo contadas excepciones. La física relativista engloba la newtoniana y coincide con ella para velocidades muy inferiores a la de la luz. Sin embargo se dan algunos dualismos como el onda-partícula que no se presentan en matemáticas, y cuya superación o integración sólo puede venir del campo científico, por mucha especulación filosófica que sobre los mismos se haga.

Pero no es eso lo peor, con ello no pasaría de ser uno de los cientos de escritos que aparecen en la sopa intelectual del posmodernismo y que no tienen otra función real que alimentar el irracionalismo en ciertos ambientes y dar soporte ideológico más o menos mediato a la reacción como luego comentaré. Lo más grave es que intenta comprometer la teoría marxista con opciones científicas concretas, cuando menos discutibles, o intenta justificar opiniones, más o menos científicas, con la cobertura del marxismo, de lo que tenemos tristes experiencias, la más sonada, la falsificación de la biología por el dogmatismo estalinista (Lissenko)[77].

Y todo ello con el soporte típico de todo revisionismo: *las cosas han cambiado* (desde Euclides, Newton o Marx). Naturalmente que han cambiado y seguirán cambiando por mucho que se vaticine el fin de la historia o el caos como culminación de la ciencia. Lo que hay que hacer es dejarse de declaraciones vacías, consagraciones y anatemas, y esforzarse en contribuir al avance real mediante análisis o propuestas, si se saben hacer.

Hay una tendencia natural a identificarse con planteamientos filosóficos, artísticos o científicos que nos parecen afines a nuestra visión del mundo, aunque esta afinidad sea en muchos casos enormemente subjetiva o meramente formal. En el terreno de las artes plásticas se han librado grandes batallas sobre el carácter progresista de determinados *ismos* y el reaccionario de otros, en la mayor parte de los casos sin llegar por ello a un avance teórico o práctico apreciable; la literatura ha quedado en muchas ocasiones impregnada, para bien o para mal, de la ideología de un escritor, pero siempre las asociaciones esquemáticas resultan muy peligrosas y no es necesario investigar mucho para encontrar grandes escritores que han sido grandes reaccionarios. ¿Sirve de algo calificar como reaccionario a un escritor, artista o pensador? Yo creo que no; los manuales soviéticos que despachaban a Platón en dos líneas (des)calificándolo de filósofo esclavista idealista compartían visión con los dirigentes mogoles de la Horda Dorada, con el que quemó la biblioteca de Alejandría o con los prelados que se negaron a presenciar la prueba de Galileo en la torre de Pisa[78] o mirar por su telescopio.

Lo dicho no significa que no tenga sentido investigar las formas y relaciones en que se produce el arte o la ciencia en una sociedad o en un período determinado, o cuál es su evolución; al contrario, es una labor imprescindible para el conocimiento de la sociedad y la fundamentación de la acción ideológica y política, incluida la política científica. Tampoco significa que esa investigación se deba limitar a un análisis académico de las relaciones estudiadas.

Pero, lo mismo que es nefasto concluir –no creo que sea necesario argumentarlo a estas alturas- que el realismo socialista es **la** expresión artística del proletariado[79] y marginar a creadores de la categoría de Einsenstein o Prokofiev, lo es dictaminar que una teoría científica es **la** correcta, por no citar la aberración extrema que es calificar una ciencia de burguesa o proletaria.

---

[77] Lissenko alumbró una teoría 'marxista' antidarwinista de la biología, que se convirtió en la oficial de la URSS y el movimiento comunista (El PCF expulsó a científicos por criticarla). Su fracaso espectacular produjo, aparte de la ruina de las explotaciones agrícolas que montó, el descrédito del marxismo en el mundo científico y un triunfo ideológico inesperado para la reacción

[78] *Se non é vero, é ben trovato.*

[79] Nunca se dijo si era la que producía, la que demandaba o la que necesitaba, ni cómo se había dictaminado

El ridículo que hizo Bergson[80] polemizando con Einstein sobre la teoría de la relatividad debería hacer meditar a los que pontifican sobre la ciencia desde puntos de vista 'filosóficos'.

La toma de postura que hacen los autores por Prigogine se apoya únicamente en una serie de citas de terceros escritores. No se exponen los puntos de vista de Progogine ni los de sus oponentes y no se dice, en la parte dedicada a las matemáticas, que el debate no se refería a las teorías matemáticas, sino a procesos físicos y biológicos y a determinadas interpretaciones de conceptos físicos como la entropía y las relaciones entre procesos macroscópicos y microscópicos. Estos debates son de gran interés, como lo es el de la conceptualización de la física cuántica y la unificación de las fuerzas -que tanto preocupó a Einstein sin que consiguiera avanzar un paso en ello-, pero, como tienen poco que ver con las crisis y las desgracias de los matemáticos, esperaremos otra ocasión para tratarlos[81].

Por todo ello, el enfoque global de la obra es reaccionario. Todo el mundo es consciente de los avances gigantescos llevados a cabo en los últimos siglos en todas las ramas científicas. Cuando se sostiene que los cimientos de las matemáticas se están derrumbando y que hay que crear un nuevo edificio sobre **bases distintas** ('*que todos los cimientos del edificio son inseguros y que necesita una reconstrucción a fondo sobre pilares más firmes, y a la vez más flexibles*' [361], ya comentado), aparte de demostrar no haber entendido nada sobre el proceso de la evolución científica[82], se está haciendo un peligroso llamamiento a apoyar las tendencias irracionalistas que bombardean desde muchos ámbitos los mismos fundamentos del pensamiento de la Ilustración, que es el soporte más humanista, libre y progresivo de que disponemos, y en el que se inserta de manera clara el pensamiento de Marx y Engels.

Es una obviedad decir que no se sabe todo, pero eso no justifica una crítica irracional e infundada a lo que se sabe. Lo que está por descubrir se encuentra, también obviamente, en el terreno que está por descubrir, sobre el que se pueden hacer especulaciones, pero no afirmaciones categóricas sobre su contenido. Suponer que se sabría todo si se hubieran adoptado determinadas posturas es de un misticismo insoportable para cualquier mente racional.

---

[80] Henri Bergson, filósofo francés calificado de irracionalista o vitalista, se opuso en principio a la teoría especial de la relatividad, que luego aceptó en una interpretación 'particular' con la que polemizó con Einstein. Éste le señaló en diversas ocasiones, algunas en encuentros públicos, sus errores de comprensión de la teoría, pero Bergson defendió su derecho a tener su propio concepto del tiempo. Sin embargo, no desarrolló ninguna teoría alternativa basada en ese concepto. Einstein sostenía que la verdad la demuestra la ciencia y dijo, a propósito de este debate, que "desconfiaba de los que dicen poseer la ciencia infusa".

[81] La dialéctica del avance científico se revela en la conceptualización y el lenguaje en que se expresa, tanto en el proceso de creación como en el de integración y difusión (éste, a veces, con fiascos como el texto que comentamos). Esto se ve desde la Grecia clásica en que se tuvieron que crear la filosofía y la ciencia con las mismas herramientas conceptuales con las que se había cantado la cólera de Aquiles. Es un tema apasionante, pero sería una digresión inoportuna tratarlo aquí.

[82] La teoría del caos no ha tocado ni tocará en su evolución futura un ápice de ninguna de las ramas anteriores de las matemáticas y además no hubiera sido posible su planteamiento sin el desarrollo de muchas de ellas. Algunos de los fenómenos naturales que no han sido bien descritos matemáticamente hasta ahora se beneficiarán de sus avances, otros tendrán que esperar. Dentro de cien años seguiremos encontrando avances que hoy no imaginamos y discutiendo su viabilidad, fundamento y eficacia, a no ser que pensemos que con el caos ha llegado el Fin de la Ciencia como se anunció el Fin de la Historia.

En definitiva, AWTG falsean los métodos y contenidos de la ciencia; apoyados en el realismo más ramplón, ignoran la dialéctica de su producción social y de su desarrollo interno, que sustituyen por una falsa epopeya de superhombres iluminados, e inventan rupturas y crisis inexistentes[83].

Como dice muy agudamente Bricmont[84], la creencia en una crisis en la ciencia alimenta "actitudes anticientíficas que combinan un extremo escepticismo hacia la ciencia con una igualmente irrazonable apertura hacia las pseudo-ciencias y las supersticiones".

Y el irracionalismo moderno, desde Schopenhauer y Nietzsche, ya sabemos a quién favorece.

Con su libro Alan Woods y Ted Grant no le están haciendo un buen servicio a la Razón ni a la Revolución –Revolt.

---

[83] Si hubieran leído con atención el libro de Gleick que tanto citan, hubieran podido advertir que casi todos los 'descubrimientos' acaban en Cantor, Poincaré, Landau, Liapunov o Kolmogorov, lo que muestra con claridad la continuidad en la evolución.

[84] *Science of Chaos or Chaos in Science?* 1996